Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik

Förslag till lösningar, Envariabel för F1, 030425

1. För $x < 2$ är den givna funktionen $= \frac{x^2-4}{-(x-2)} = -(x+2)$. Då $x \to 2$ blir detta **Svar:** -4.

2. Linjerna kan skrivas $y - 2 = m(x - 4)$. För tangenten gäller, att $m = y'(4) = 1/4$ och för normalen är $m = -1/y'(4) = -4$, så

   tangentlinjens ekvation är $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ medan

   normallinjens ekvation är $y - 2 = -4(x - 4)$.

3. $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, varför

   $$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot (\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

   För tredjederivatan får vi $f'''(x) = -\frac{3}{2}(1 + x^2)^{-5/2} \cdot 2x = -\frac{x}{3(1+x^2)^{5/2}}$.

4. a) Sätt $y = h(x)$. Vi vill lösa ut x som funktion av y. Vi har $f(x) = -y/3$, så $x = g(f(x)) = g(-y/3) = h^{-1}(y)$.

   b) Analogt har vi $y = f(x-2)$ som ger $g(y) = x-2$, dvs $x = 2+g(y) = k^{-1}(y)$.

5. Karakteristiska ekv. är $r^2 + 2r + 2 = 0$, med rötter $r = -1 \pm i$. Den allmänna homogena lösningen är således $y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$, där A och B är konstanter. $x = 0$ ger $A = y(0) = 0$, så $y'(0) = B(e^{-x} \sin x)'(0) = -B$ ger $B = -3$ varav **Svar:** $y = -3e^{-x} \sin x$.

6. För alla x gäller $e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^9 + \ldots$. Vi vet att faktorn framför x^{27} är $= \frac{f^{(27)}(0)}{27!}$. Enligt ovan är denna faktor $-\frac{1}{9!}$, varför $f^{(27)}(0) = -27!/9!$

7. Dela in intervallet $[0, 2]$ i n delintervall av längd $\Delta x = 2/n$ och låt $x_k = 2k/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$. Då är den givna summan en riemannsumma för integralen $\int_0^2 (1 - x^2)\, dx = -\frac{2}{3}$. Summan konvergerar därför mot $-\frac{2}{3}$.

8. Substitutionen $u = x^2 + 4x + 9$ överför integralen i

$$\frac{1}{2}\int_9^{14} u^{1/3}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\big[u^{4/3}\big]_9^{14} = \frac{3}{8}\big(14^{4/3} - 9^{4/3}\big).$$

9. Den sökta arean blir 2π gånger $\int_0^1 x\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = [u = 1+4x^2] = \frac{1}{8}\int\sqrt{u} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}[u^{3/2}] = \frac{1}{12}[1+4x^2]_0^1 = 1/3$. **Svar:** $2\pi/3$.

10. Anta $|x| < 1$. Från formeln för en geometrisk serie, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, får vi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, vilket ger

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1/3}{1-1/3} + 2\frac{2/3}{1-2/3} = \frac{1}{2} + 2\cdot 2 = \frac{9}{2}.$$

11. För $x \geq 0$, $y \geq 0$ gäller $y = (1-x^{2/3})^{3/2}$, varför $y' = \frac{3}{2}(1-x^{2/3})^{1/2}(-\frac{2}{3}x^{-1/3}) = -(1-x^{2/3})^{1/2}/x^{1/3}$, så

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} = \left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)^2,$$

varav $ds = x^{-1/3}\,dx$ vilket innebär att längden av kurvdelen i första kvadranten är $\int_0^1 ds = \frac{3}{2}[x^{2/3}]_0^1 = 3/2$, så, av symmetriskäl, är den totala längden $= 4\cdot\frac{3}{2} = 6$. **Svar: 6 .**

12. Vi söker maximum för $2\sqrt{x^2+y^2}$ då $x^2 + y^4 = 1/8$. Räkningarna förenklas om vi i stället maximerar $x^2 + y^2 = 1/8 - y^4 + y^2 = g(y)$, för $|y| \leq (1/8)^{1/4}$. Detta är ingen inskränkning.

$g'(y) = -4y^3 + 2y^2 = 2y(1-2y^2)$ ger de kritiska punkterna $y = 0$ och $y = \pm(1/\sqrt{2})$. Vi jämför kandidaterna: $g(0) = 1/8$, $g(\pm(1/\sqrt{2})) = 3/8$, $g(\pm(1/8)^{1/4}) = 1/\sqrt{8}$ (intervallets ändpunkter). Nu är $\frac{3}{8} > \frac{1}{\sqrt{8}}$ eftersom $\frac{9}{64} > \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$. **Svar:** $2\sqrt{\frac{3}{8}}$.

13. Från formeln $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ följer att $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = (1/(1-x))' = 1/(1-x)^2$, under förutsättning att $|x| < 1$, vilket antas från och med nu. Multiplikation med x ger $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

En till derivering ger $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = (1/(1-x)^2)' = 2/(1-x)^3$, vilket, efter multiplikation med x^2 och användande av den tidigare formeln, ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Kommentar: Om $|x| \geq 1$ går inte den allmänna termen i serien $\sum_1^{\infty} n^2 x^n$ mot 0. Serien konvergerar därför bara om $|x| < 1$.

14. Detta är Ex. 6 på sid 365 i Adams (avsnitt 6.3). Korrekt ansats är

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1}.$$

Svaret är

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

15. Med substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ gäller (Adams, s. 358)

$$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}, \quad d\theta = \frac{2\,dx}{1+x^2}.$$

Integralen blir därför

$$\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(3+2\frac{1-x^2}{1+x^2})(1+x^2)} = \int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{5+x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

16. a) Partialintegration ger $\int x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \int x \cdot x e^{-x^2/2}\,dx = x(-e^{-x^2/2}) + \int 1 \cdot e^{-x^2/2}\,dx$. Vid integration över $(-\infty, \infty)$ försvinner den första termen i högerledet och vi får $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

b) Som ovan fås $\int x^4 e^{-x^2/2}\,dx = x^3(-e^{-x^2/2}) + \int 3x^2 \cdot e^{-x^2/2}\,dx$, varför $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}\,dx = 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = 3 \cdot \sqrt{2\pi}$, enl. a).

17. Tillämpa medelvärdessatsen på intervallen $(0,1)$ och $(1,2)$. I det första fallet finner vi att $f'(c_1) = 0$ för något $c_1 \in (0,1)$ och i andra fallet $f'(c_2) = 1$ för något $c_2 \in (1,2)$. Existens av andraderivatan i hela intervallet medför att f' är kontinuerlig. Enligt satsen om mellanliggande värden antar f' alla värden mellan 0 och 1 i intervallet I. Speciellt antas värdet $1/7$.