Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik

Förslag till lösningar, Envariabel för F1, 030821

1. Uttrycket kan skrivas

$$\frac{3x+2\sqrt{x}}{1-x} = \frac{3+2/\sqrt{x}}{1/x-1} \to \frac{3}{-1} = -3, \quad x \to \infty.$$

2. $y' = 3x^2 = 3$ precis då $x = \pm 1$, och då är $y = \pm 1$, varför linjerna har ekvationer $y \pm 1 = 3(x \pm 1)$.

3. $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, varför

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot (\sqrt{1+x^2})'}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

   För tredjederivatan får vi $f'''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-5/2} \cdot 2x = -\frac{x}{3(1+x^2)^{5/2}}$.

4. Kalla inversen för H. Då gäller $x = H(u)$ precis då $u = h(x) = 3f(x-2)$, varav $x - 2 = g(u/3)$, dvs $H(u) = x = 2 + g(u/3)$.

5. Karakteristiska ekv. är $r^2 - 4 = 0$, med rötter $r = \pm 2$. Den allmänna homogena lösningen är således $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, där C_1 och C_2 är konstanter. Då e^{2x} löser den homogena ekvationen ansätter vi en partikulärlösning på formen $y_p = Axe^{2x}$. Uträkning ger att konstanten $A = 1/4$, varför $y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$ och $0 = y(0) = C_1 + C_2$ ger $C_1 + C_2 = 0$ varför $y = C_1(e^{2x} - e^{-2x}) + \frac{1}{4}xe^{2x}$. Derivering ger $y'(0) = 2C_1 + \frac{1}{4}$, dvs $C_1 = 3/4$. **Svar:** $y = \frac{3}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) + \frac{1}{4}xe^{2x}$.

6. För alla x gäller $e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^9 + \ldots$. Vi vet att faktorn framför x^{27} är $= \frac{f^{(27)}(0)}{27!}$. Enligt ovan är denna faktor $-\frac{1}{9!}$, varför $f^{(27)}(0) = -27!/9!$

7. Sätt $u = 3\ln x$, så att $du = 3dx/x$. Integralen blir $\frac{1}{3}\int \sin u \, du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + C$ där C är en (integrations-)konstant.

8. Efter substitutionen $u = \sqrt{x}$, med $dx = 2udu$, blir motsvarande obestämda integral $= \int 2u^2\,du$. Upprepad partialintegration ger $2u^2e^u - \int 4ue^u\,du = 2u^2e^u - 4ue^u + \int 4e^u\,du = (2u^2 - 4u + 4)e^u + C$. Den sökta integralen blir således $[(2u^2 - 4u + 4)e^u]_0^1 = 2e - 4$, där vi använt att också $u : 0 \to 1$.

9. Allmänt gäller att den sökta arean är $2\pi \int_a^b |f(x)|\,ds$. Här får vi $2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = [u = 1 + 9x^4] = \frac{\pi}{18}\int_1^{10} \sqrt{u}\,du$, så
Svar: $\frac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1)$.

10. Anta $|x| < 1$. Från formeln för en geometrisk serie, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, får vi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, vilket ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 3^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1/4}{1 - 1/4} + 3\frac{3/4}{1 - 3/4} = \frac{1}{3} + 9 = \frac{28}{3}.$$

11. Arean är $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = [u = x^2] = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = [u = 4v] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{4dv}{v^2+1} = \frac{1}{8}[\arctan v]_0^1 = \frac{\pi}{32}$.

12. Det gäller att maximera $x^2 + y^2$ (radien i kvadrat) då $x^6 + y^2 = 1$, dvs maximera $x^2 + 1 - x^6 = f(x)$, $-1 \le x \le 1$. $f'(x) = 2x - 6x^5 = 2x(1 - 3x^4)$ vilket blir 0 då $x = 0$ eller $x^2 = 1/\sqrt{3}$. $f(0) = f(\pm 1) = 1$ medan f antar värdet $a = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ om $x^2 = 1/\sqrt{3}$. Uppenbarligen ger detta största värdet för f (ty $a > 1$). Den efterfrågade korridorbredden är $2\sqrt{a}$.

13. Vi måste undersöka hur många av f:s höger- och vänsterderivator som sammanfaller i $x = 0$.För e^x är alla dessa $= 1$. Sätt $g(x) = \cos x + x + x^2$. Då är $g'(x) = -\sin x + 1 + 2x$, $g''(x) = -\cos x + 2$ och $g'''(x) = \sin x$. Här är $g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$, medan $g'''(0) = 0$. Alltså är $f(x)$ två gånger deriverbar i $x = 0$.

14. Detta är den rotationsvolym som bildas då området $r \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ roteras kring $x-$axeln. Då måste $|x| \le \sqrt{R^2 - r^2}$. Vi får

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - x^2 - r^2)\,dx = 2\pi\big[(R^2 - r^2)x - \frac{x^3}{3}\big]_0^{\sqrt{R^2-r^2}}$$

vilket blir **Svar:** $\frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}$.

15. Skriv $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, med $a_n \neq 0$. Då är

$$\begin{aligned}\frac{P(x+1)}{P(x)} =& \frac{a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + a_1(x+1) + a_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \\ =& \frac{(x+1)^n}{x^n} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x+1} + \cdots + a_0 \frac{1}{(x+1)^n}}{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_0 \frac{1}{x^n}} = AB.\end{aligned}$$

Här gäller $A = \frac{(x+1)^n}{x^n} = (\frac{x+1}{x})^n = (1 + \frac{1}{x})^n \to 1$ och $B \to \frac{a_n}{a_n} = 1$, så det sökta gränsvärdet är 1.

16. a) g:s definitionsmängd är f:s värdemängd. Uppenbarligen gäller att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$. Eftersom f är kontinuerlig antas därför alla reella värden av f.

    b) Allmänt gäller $g'(f(x)) = 1/f'(x)$. $f'(x) = 3x^2 + 1$ och $f(1) = 3$ ger $g'(3) = 1/f'(1) = 1/4$.

    c) Per definition är $u = f(x)$ om och endast om $x = g(u)$ så $\int_1^3 g(u)^2\,du = \int_0^1 x^2 f'(x)\,dx = \int_0^1 x^2(3x^2+1)\,dx = [\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3]_0^1 = 14/15$.

17. Integranden är ≥ 0 och $\leq (\pi/2)/x^2$. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ visar att integralen är konvergent. (Se Adams Ex. 1, sid 373.)

    För att beräkna integralen partialintegrerar vi över ett ändligt intervall $[1, A]$:

$$\begin{aligned}&\int_1^A \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \big[-\frac{1}{x}\cdot\arctan x\big]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \\ =&\frac{\pi}{4} - \frac{\arctan A}{A} + \int_1^A \big(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\big)\,dx \\ =&\frac{\pi}{4} - \frac{\arctan A}{A} + \ln\frac{A}{\sqrt{A^2+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}, \quad A \to \infty.\end{aligned}$$