Lösningsförslag till
5B1106 Diff & Int 2003/12/18

1) Tayloutveckla funktionenrna i bråket:

$$\frac{\cos x + \sin x - P(x)}{x^3 e^x} = \frac{1 - x^2/2 + O(x^4) + x - x^3/3! + O(x^5) - P(x)}{x^3(1 + x + x^2/2 + O(x^3))} =$$

$$\frac{1 + x - x^2/2! - x^3/3! - P(x) + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)},$$

där $O(x^k)$ srår för alla termer som innehåller produkt av x^k (Det kallas ordo, och är beteckning för resttermer).

För att bråket ska ha ett ändligt gränsvärde så måste $P(x) = 1 + x - x^2/2! + ax^3$. Vi ska bestämma a s.a. gränsvärdet blir det givna i uppgiften. Alltså

$$\frac{\cos x + \sin x - P(x)}{x^3 e^x} = \frac{1 + x - x^2/2! - x^3/3! - (1 + x - x^2/2! + ax^3) + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)} =$$

$$\frac{-x^3/3! - ax^3 + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)} =$$

(bryt ut x^3 i både täljaren och nämnaren och observera att $O(x^4) = x^3 O(x)$)

$$= \frac{-1/3! - a + O(x^1)}{1 + O(x^1)} \to -1/3! - a$$

då $x \to 0$. För att det sista ska vara lika med 1 krävs att $-1/3! - a = 1$ eller $a = -1/3! - 1 = -7/6$. Alltså polynomet är

$$P(x) = 1 + x - x^2/2 - (7/6)x^3.$$

---

2) Om $ax + b$ är en snedasymptot till $f(x)$ så gäller det att

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Här måste dock $\pm\infty$ betraktas. Vi får

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{x(x-2)} = \frac{x^2\sqrt{1 - x^{-1} + x^{-4}}}{x(x-2)} = \frac{x\sqrt{1 - x^{-1} + x^{-4}}}{(x-2)} \to 1.$$

DVS $a = 1$.

Nu beräknar vi b:

$$(f(x) - ax) = \left(\frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{(x-2)} - x\right) = \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1} - x(x-2)}{(x-2)} =$$

$$\frac{x^4 - x^3 + 1 - (x(x-2))^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^4 - x^3 + 1} + x(x-2)\right)} = \frac{3x^3 - 4x^2 + 1}{(x-2)\left(\sqrt{x^4 - x^3 + 1} + x(x-2)\right)} \to \frac{3}{2} = b.$$

Altså

$$g(x) = x + \frac{3}{2}$$

är enda sneda asymptoten till funktionen.

---

3) Derivatan $G'(x)$ ges av

$$G'(x) = \arcsin^2(\sin(x))(\sin(x))' - \arcsin^2(x) = x^2\cos(x) - \arcsin^2(x).$$

---

4) Om volymen V_a vore ändlig så skulle den ges av (anta $2a \neq 1$)

$$\frac{V_a}{\pi} = \lim_{r\to 0}\int_r^1 \left(\frac{1}{x^a}\right)^2 dx = \lim_{r\to 0}\int_r^1 \frac{1}{x^{2a}}\, dx = \lim_{r\to 0}\left[\frac{1^{-2a+1}}{-2a+1} - \frac{r^{-2a+1}}{-2a+1}\right].$$

Gränsvärdet existerar då $-2a+1 > 0$, dvs $a < 1/2$, och är lika med $1/(1-2a)$.

För $2a = 1$ får vi som vanligt logaritm funtionen som primitiv funktion och integralen blir oändlig.

Alltså volymen är ändligt då $a < 1/2$.

Svar: $V_a = \pi/(1-2a)$, då $a < 1/2$.

---

5) Partialbråksuppdelning är vad som behövs. Först observera att $x^2 - x + 2 = (x - 1/2)^2 + 2 - 1/4 > 0$ dvs polynomet $x^2 - x + 2$ har inga reella rötter.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}.$$

Bestäm A, B, C genom koefficientidentifiering. Vi får således att

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2} = \frac{A(x^2-x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-x+2)} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+2)},$$

som leder till

$$A(x^2-x+2)+(Bx+C)(x-1) = x+1.$$

Härur löser man A, B, C och får

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 1.$$

Nästa steg blir att integrera var och en av dessa funktioner:

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+2)} = \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2-x+2} = \log|x-1| + \int \frac{-x+1}{(x-1/2)^2+7/4}.$$

Låt oss beräkna sista integralen:

$$\int \frac{-x+1}{(x-1/2)^2+7/4}dx = \frac{4}{7}\int \frac{-x+1}{(\sqrt{4/7}(x-1/2))^2+1}dx = \left\{t = \sqrt{4/7}(x-1/2)\right\} =$$

$$\sqrt{4/7}\int \frac{-t+5/2}{t^2+1}dt = \sqrt{4/7}\left((-1/2)\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \int \frac{5/2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$\sqrt{4/7}\left((-1/2)\log(t^2+1) + (5/2)\arctan t\right) =$$

$$\sqrt{4/7}\left((-1/2)\log(x^2-x+2) + (5/2)\arctan(\sqrt{4/7}(x-1/2)\right).$$

Svar:

$$\log|x-1| + \sqrt{4/7}\left((-1/2)\log(x^2-x+2) + (5/2)\arctan(\sqrt{4/7}(x-1/2)\right) + \text{Konstant}\ .$$

6) Sätt $z = y''$. Vi har $z' - z = 4x$. Först en homogen och sedan en partikulär lösning. Det homogena $z' - z = 0$ ges enkelt av $z = ae^x$. Det partikulära lösningen får man genom ansatsen $z = bx + c$ och efter insättning fås

$$b - bx - c = 4x.$$

Dvs $b = -4$, och $c = -4$. Alltså lösningen ges av

$$z = z_h + z_p = ae^x - 4x - 4.$$

Eftersom $y'' = z$ så behövs integration två gnger får att bestämma y. Alltså

$$y = ae^x - 2/3x^3 - 2x^2 + Cx + D.$$

---

7) Vi har

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{x\cos x}{\sin x} - 1\right| = \left|\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cos x - \cos x + \cos x - 1\right| =$$

$$\leq \left|\frac{x}{\sin x} - 1\right| |\cos x| + |\cos x - 1| = I_1|\cos x| + I_2.$$

Vi tittar närmare på I_1:

$$I_1 = \left|\frac{x}{\sin x} - 1\right| = \left|\frac{x}{x + f^{(3)}(\xi)x^3/3!} - 1\right|$$

där vi har använt Taylorutveckling för $\sin x$. Vi får (då $f^{(3)}(\xi) = -\cos\xi$) att

$$I_1 = \left|\frac{f^{(3)}(\xi)x^3/3!}{x + f^{(3)}(\xi)x^3/3!}\right| = \left|\frac{-\cos(\xi)x^3/3!}{x - \cos(\xi)x^3/3!}\right| \leq \left|\frac{|\cos(\xi)||x|^2/2}{|x|(1 - |\cos(\xi)||x|^2/3!)}\right|$$

$$= \left|\frac{|x|^2/3!}{(1 - |x|^2/3!)}\right| \leq 2|x|^2/3! = |x|^2/3$$

där vi har använt oss av att $|x| < 1$.

För I_2 gör vi ngt liknande, genom att vi utvecklar $\cos x = 1 - (\cos\xi)x^2/2$. Alltså

$$I_1 = |\cos x - 1| = |\cos\xi||x|^2/2 \leq |x|^2/2.$$

Vi få

$$|f(x) - 1| = I_1|\cos x| + I_2 \leq (1/3 + 1/2)|x|^2 < |x|^2.$$

Väljer vi $|x| < \sqrt{\epsilon}$ får vi

$$|f(x) - 1| < \epsilon.$$

---

8)

Fallet $f \geq 0$ Substitutionen $x = 1/t$ ger den nya integralen

$$I = \int_0^1 \frac{(e^t - 1 - t - t^2/2)f(t)}{t^2 \sin t^2} dt.$$

För $0 < t < 1$ har vi (Taylorutveckla)

$$|e^t - 1 - t - t^2/2| = |e^\xi t^3/3!| \leq e^1 t^3/3! \leq t^3/2$$

eftersom $0 < \xi < t < 1$. Alltså integralen kan uppskattas

$$I \leq \int_0^1 \frac{tf(t)}{\sin t^2} = \int_0^1 \frac{t^2}{\sin t^2} \frac{f(t)}{t}.$$

Det räcker nu att visa $\frac{t^2}{\sin t^2} < K$ (ngn konstant K). Eftersom då kan vi använda oss av villkoret $\int_0^1 f/t$ begränsad.

För att visa att $\frac{t^2}{\sin t^2} < K$, sätter vi $z = t^2$ och observerar att $0 < z = t^2 < 1$. Vidare har vi

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| = \frac{|z - (\sin \xi) z^2/2|}{|z|} \geq \frac{|z|(1 - |\sin \xi||z|/2)}{z} \geq 1 - z/2 > 1/2.$$

DVS $|t^2/\sin t^2| < 2$. Resten följer som ovannämnd.

fall II Om vi inte antar $f \geq 0$ så är uppgiften svårare. Först gör vi en partiell integration genom att vi sätter

$$F(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{s} ds \qquad g(t) = \frac{e^t - 1 - t - t^2/2}{t \sin t^2}$$

och får (observera $F(0^+) = 0$ och $g(0^+) = 1/3$; beräkna)

$$I = \int_0^1 \frac{(e^t - 1 - t - t^2/2) f(t)}{t^2 \sin t^2} dt = \int_0^1 g(t) \frac{f(t)}{t} dt = g(1)F(1) - g(0^+)F(0^+) - \int_0^1 g'(t)F(t).$$

Nu är $F(t)$ begränsad (sg $|F| \leq K$) s att vi har

$$I \leq K \int_0^1 |g'(t)| dt$$

Visa nu att $g'(t)$ är begränsad. Man kan visa att

$$\lim_{t \to 0} g'(t) = \frac{1}{24}$$

(använd Taylorutveckling, efter att ha deriverat). Resten är klart.