

Diff & Int 5B1106, 2003/12/18, 8.00–13.00

Inga hjälpmmedel är tillåtna.

För betyg 3 erfordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng, och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng är angivet inom parentes vid varje uppgift. Total poäng 35.

Ange dina bonuspoäng på skrivningsomslaget. **Motivera ordentligt ditt svar.**

- 1)** Bestäm ett polynom P sådant att (4p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - P(x)}{x^3 e^x} = 1.$$

- 2)** Bestäm eventuella sneda asymptoter till funktionen (4p)

$$\frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{x - 2}.$$

- 3)** En funktion $G(x)$ definieras enligt (4p)

$$G(x) = \int_x^{\sin(x)} \arcsin^2(t) dt.$$

Bestäm dG/dx . (Förenkla svaret så långt som möjligt.)

- 4)** Bestäm alla reella tal a sådana att volymen hos rotationskorpen som alstras genom rotation av kurvan (4p)

$$y = \frac{1}{x^a}, \quad 0 < x < 1$$

kring x -axeln blir ändlig. Beräkna även volymen hos dessa kroppar.

- 5)** Beräkna integralen (4p)

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+2)}.$$

- 6)** Bestäm den allmänna lösningen till linjära differential ekvationen (5p)

$$y''' - y'' = 4x.$$

- 7)** Låt (5p)

$$f(x) = \frac{x \cos x}{\sin x}.$$

Visa att för given $\epsilon > 0$ (litet), gäller det att

$$|f(x) - 1| < \epsilon \quad \text{då} \quad |x| < \sqrt{\epsilon}.$$

- 8)** Låt $f(x)$ (≥ 0) vara en kontinuerlig funktion definierad på $(0, 1)$ med egenskapen att (5p)

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx < 2004.$$

Undersök huruvilda integralen

$$\int_1^\infty \frac{(e^{1/x} - 1 - 1/x - 1/(2x^2))f(1/x)}{\sin(1/x^2)} dx,$$

är konvergent.