Institutionen för Matematik, **KTH**

Lösningsförslag till
5B1106 Diff & Int 2003/12/18

1a) Funktionen är kontinuerlig i $x = 0$ om

$$|f(x) - f(0)| \to 0 \qquad \text{då } x \to 0.$$

Vi har dock

$$\lim_{x\to 0^\pm} \arctan \frac{1}{x} = \pm\pi/4.$$

Och för att $\lim f(x)$ ska vara $f(0) = 0$ måste vi ha $a > 0$. Dvs

$$|f(x) - f(0)| = |x^a \arctan \frac{1}{x} - 0| \le \frac{\pi}{4}|x|^a \quad \to \quad 0$$

om $a > 0$. Alltså f är kontinuerlig om $a > 0$.
1b) Funktionen är deriverbar i $x = 0$ om

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{existerar} \qquad \text{då } x \to 0.$$

Vi har

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{x^a \arctan}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} \arctan \frac{1}{x}.$$

Det sista gränsvärdet existerar om $a > 1$, och är

$$f'(0) = 0 \quad \text{om } a > 1.$$

Observera att

$$f'(0^\pm) = \lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x} = \pm\pi/4 \quad \text{om } a = 1,$$

och därför existerar inte derivatan då $a = 1$. För $a < 1$ är derivatan ej ändlig.

---

2) Tayloutveckla $\sin y$, och sedan sätt $y = x^3$:

$$\sin x^3 = \sin y = y - y^3/3! + O(y^5) = x^3 - x^9/3! + O(x^{15}).$$

Insättning ger

$$\frac{x - \sqrt[3]{\sin(x^3)}}{x^a} = \frac{x - \sqrt[3]{x^3 - x^9/3! + O(x^{15})}}{x^a} = \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x^6/3! + O(x^{12})}}{x^{a-1}}.$$

Taylorutveckla nu funktionen $\sqrt[3]{1+z}$ kring $z = 0$, och sedan sätt $z = -x^6/3! + O(x^{12})$:

$$\sqrt[3]{1+z} = 1 + z/3 + O(z^2) = 1 - (x^6/3! + O(x^{12}))/3 + O(z^2) = 1 - x^6/18 + O(z^{12}).$$

Vi får

$$\frac{x - \sqrt[3]{\sin(x^3)}}{x^a} = \frac{1 - 1 + x^6/18 - O(x^{12})}{x^{a-1}} = \frac{x^6/18 - O(x^{12})}{x^{a-1}} = \frac{1/18 - O(x^6)}{x^{a-7}}$$

Det sista bråket är ändligt om $a \leq 7$. Gränsvärdet blir då $1/18$ om $a = 7$, och det blir 0 om $a < 7$. För $a > 7$ existerar inte ngt gränsvärde.

---

3) Partialbråksuppdelning är vad som behövs:

$$\frac{6x-16}{x^3+16x} = \frac{6x-16}{x(x^2+16)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16}.$$

Bestäm A, B, C genom koefficientidentifiering. Vi får således att

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16} = \frac{A(x^2+16)+(Bx+C)x}{x(x^2+16)} = \frac{6x-16}{x(x^2+16)},$$

som leder till

$$(A+B)x^2 + Cx + 16A = 6x - 16.$$

Härur löser man A, B, C och får

$$A = -1, \qquad B = 1, \qquad C = 6.$$

Nästa steg blir att integrera var och en av dessa funktioner:

$$\int \frac{6x-16}{x^3+16x} = \int \frac{-1}{x} + \int \frac{x}{x^2+16} + \int \frac{6}{x^2+16} = -\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+16) + \frac{3}{2}\arctan(x/4) + Konstant.$$

---

4) Ritar man grafen för dessa funktioner ser man direkt att de är spegelbild (i linjen $y = 1$)av varandra. Sätt

$$y_1 = x^2 \qquad y_2 = 2 - x^2,$$

och flytta ned båda kurvorna med ett "steg" enligt

$$Y_1 = y_1 - 1 = x^2 - 1, \qquad\qquad Y_2 = y_2 - 1 = 1 - x^2.$$

Vi har

$$Y_1 = -Y_2.$$

Rotationen kan nu ske kring x-axeln och vi får samma volym som innan nedflyttnignen av graferna. Vidare observera att graferna är spegelild av varandra, därför kan vi betrakta bara ena kurvans rotation, ta Y_1:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} Y_1^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2-1)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

---

5) Lös först den homogena diff. ekvationen genom att hitta nollställen till karakt. plynomet

$$r^2 + r - 2$$

som ger $r = 1, -2$. Homog. lösningn

$$y_h = Ae^t + Be^{-2t}.$$

Inhomog. lösningen ges av ett polynom $y = at + b$, som efter insättning ger

$$a - 2(a + bt) = t \qquad \rightarrow \qquad a = -1/2, \quad b = -1/4.$$

Och vi har

$$y_a = -t/2 - 1/4 + Ae^t + Be^{-2t}.$$

Nu ska vi bestämma A, B s.a. begynnelsevillkoren är satisfierade. Detta ger

$$A = 1/3, \qquad B = -1/12.$$

---

6) I punkterna $x = 0$ och $x = 1$ har vi lodräta asymptoter. Funktionen har inga sneda asymptoter, dvs av typ $ax + b$. Observera att då $x \to \infty$ så har vi att $y \approx 2\ln x + 1$ och logaritm funtionen har inga sneda asymptoter. Matematisk visas detta genom att man kan visa att

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + (x^2+1)/(x^2-1)}{x} = 0.$$

Det finns inga horisontella asymptoter eftersom $y \to \infty$ för stora x.

Derivata

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

och $f'(x) = 0$ ger (efter förenkling) $x^3 - 5x + 2 = 0$. Prövning ger $x = 2$ och sedan $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

x	0		$\sqrt{2}-1$		1		2	
$f'(x)$	ξ	$+$	0	$-$	ξ	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	$-\infty, +\infty$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

7) Vi har

$$|f(x)-1| = \left|e^x \frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|e^x \left(\frac{\sin x}{x}\right) - e^x + e^x - 1\right| =$$

$$\leq e^x \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| + |e^x - 1| = e^x I_1 + I_2.$$

Vi tittar närmare på I_1:

$$I_1 = \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{x + f^{(3)}(t)x^3/3!}{x} - 1\right| = \left|f^{(3)}(t)x^2/3!\right| =$$

där vi har använt Taylorutveckling för $\sin x$. Vi får (då $f^{(3)}(t) = -\cos t$) att

$$I_1 = \left|x^2 \cos t\right|/3! \leq |x|^2/6,$$

där vi har använt oss av att $|\cos t| \leq 1$.

För I_2 gör vi ngt liknande, genom att vi utvecklar e^x kring $x = 0$

$$I_2 = |e^x - 1| = |1 + xe^t - 1| \leq e^1|x| \leq 3|x|,$$

då $|t| \leq 1$. Alltså

$$|f(x) - 1| = I_1|e^x| + I_2 \leq (|x|/6 + 3)|x| < 4|x|.$$

---

8)

$$\sum_1^\infty \frac{3n \cdot n - 3n(n+1) + a(n+1)}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \frac{n(a-3) + a}{n(n+1)}$$

Om $a = 3$ så kommer serien att konvergera och är

$$\sum_1^\infty \frac{3}{n(n+1)} = 3 \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 3 \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 3\ .$$