

## Diff & Int 5B1106, 2004/04/16, 8.00–13.00

*Inga hjälpmmedel är tillåtna.*

För betyg 3 erfordras minst 16 poäng, för betyg 4 minst 22 poäng, och för betyg 5 minst 30 poäng inklusive bonuspoäng. Det maximala antalet poäng är angivet inom parentes vid varje uppgift. Total poäng 35.

Ange dina bonuspoäng på skrivningsomslaget. **Motivera ordentligt ditt svar.**

- 1)** Funktionen  $f(x)$  definieras för  $x \neq 0$  som

$$f(x) = x^a \arctan \frac{1}{x} \quad \text{då } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

**a)** För vilka  $a$  är  $f$  en kontinuerlig funktion i  $x = 0$ . (1p)

**b)** För vilka  $a$  är  $f$  en deriverbar funktion i  $x = 0$ . Bestäm derivatan för dessa  $a$ . (3p)

**2)** För vilka reela  $a$  är gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt[3]{\sin(x^3)}}{x^a}$$

ändligt? Bestäm gränsvärdet för dessa  $a$ .

**3)** Bestäm samtliga antiderivator (de primitiva funktioner) till funktionen (4p)

$$f(x) = \frac{6x - 16}{x^3 + 16x}.$$

**4)** Området mellan kurvorna  $y = x^2$  och  $y = 2 - x^2$  roterar ett varv kring linjen  $y = 1$ . (4p)  
Bestäm rotationsvolymen.

**5)** Bestäm den lösning till differentialekvationen (4p)

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t$$

som uppfyller begynnelsevillkoren  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

**6)** Undersök funktionen (5p)

$$y = 2 \ln x + \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad x > 0.$$

genom att rita kurvan, ange eventuella asymptoter, och bestäm lokala max- och minimumpunkter.

**7)** Låt (5p)

$$f(x) = \frac{e^x \sin x}{x} \quad \text{då } x \neq 0 \quad f(0) = 1.$$

Visa att det finns en konstant  $K$  s.a.

$$|f(x) - 1| \leq K|x| \quad \text{då } |x| < 1 .$$

**8)** Bestäm den reela konstanten  $a$  så att serien (5p)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{3n}{n+1} - 3 + \frac{a}{n} \right)$$

konvergerar. Beräkna sedan seriens summa för detta värde på  $a$ .