Institutionen för Matematik, **KTH**

Lösningsförslag till
5B1106 Diff & Int 2004/08/19

1a) Svar:

$$0, \quad 0, \quad 2\,.$$

1b)

$$|f(x)-1| = |(x+1)\sin 2x| \le |(x+1)||2x| < (\epsilon+1)2\epsilon < 3\epsilon$$

om $|x| < \epsilon < 1$. Vi har anvnt oss av att $|\sin t| \le t$

---

2) Derivering ger

$$f'(x) = \frac{x^2-x}{1+x} \ge 0$$

om $(x^2-x) = x(x-1) \ge 0$, dvs $x \ge 1$. Alltså f r vxande fr $x \ge 1$.

Andra derivatan fås fram:

$$f''(x) = 1 - 2/(x+1)^2$$

och detta r positive då $(x+1)^2 \ge 2$ dvs $x \ge \sqrt{2}-1$ eller $x \le -\sqrt{2}-1 < 0$. Alltså f r konvex fr $x \ge \sqrt{2}-1$.

---

3) Partialbråksuppdelning är vad som behövs:

$$\frac{3x-8}{x(x^2+16)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16}.$$

Bestäm A, B, C genom koefficientidentifiering. Vi får således att

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16} = \frac{A(x^2+16)+(Bx+C)x}{x(x^2+16)} = \frac{3x-8}{x(x^2+16)},$$

som leder till

$$(A+B)x^2 + Cx + 16A = 3x - 8.$$

Härur löser man A, B, C och får

$$A = -1/2, \qquad B = 1/2, \qquad C = 3.$$

Nästa steg blir att integrera var och en av dessa funktioner:

$$f(x) = \int \frac{3x-8}{x^3+16x} = \int \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+16} + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2+16}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{1}{4}\log(x^2+16) + \frac{3}{4}\arctan(x/4) + K.$$

$f(1) = 0$ ger $K = -\frac{1}{4}\log(17) - \frac{3}{4}\arctan(1/4)$.

---

4) Rotationsvolymen ges av

$$V = 2\pi\int_0^2 xf(x)dx = 2\pi\int_0^2 x(1-(1-x)^2)dx$$

och mantel arean av

$$A = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1+(2(1-x))^2}dx$$

Vi rknar integralerna:

$$V = 2\pi \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx = ... = 2\pi(-4+16/3)$$

$$\frac{A}{2\pi} = \int_0^2 x\sqrt{1+4(1-x)^2}dx = \{z=(1-x)\} = \int_{-1}^1 (1-z)\sqrt{1+4z^2}dz =$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1+4z^2}dz - \int_{-1}^1 z\sqrt{1+4z^2}dz = I_1 + I_2$$

Frsta integralen lses genom invers tangent-substitution $2z = \tan\theta$ (boken sidan 354), och andra integralen r lika med noll, då integranden r udda! Vi får

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+4z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 \sqrt{1+u^2}du = \{u=\tan\theta\}\frac{1}{2}\int_{u=-2}^{u2} \sec^3\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_{u=-2}^{u=2}$$

Anvnder vi att $u = \tan\theta$ och $\sqrt{1+u^2} = \sec\theta$ får vi

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+4z^2}dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{1+u^2})u + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+u^2}+u|\right]_{u=-2}^{u=2} =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4}\left[\ln|\sqrt{5}+2| - \ln|\sqrt{5}-2|\right]$$

Alltså

$$arean = \text{A + underytan} = \sqrt{5} + \frac{1}{4}\left[\ln|\sqrt{5}+2| - \ln|\sqrt{5}-2|\right] + 8\pi.$$

---

5) Lös först den homogena diff. ekvationen genom att hitta nollställen till karakt. polynomet

$$r^2 + 2r - 1$$

som ger $r_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$. Homog. lösningn

$$y_h = Ae^{(-1+\sqrt{2})t} + Be^{(-1-\sqrt{2})t}.$$

Inhomog. lösningen ges av ett polynom $y = at^2 + bt + c$, som efter insättning ger

$$2a + 2(2at+b) - (at^2+bt+c) = 2t - 1 \qquad \rightarrow \qquad a = 0, \quad b = -2, \quad c = -3.$$

Och vi har

$$y_a = -2t - 3 + Ae^{(-1+\sqrt{2})t} + Be^{(-1-\sqrt{2})t}.$$

---

6)

Sätt

$$I = \int xe^x \cos x = gF - \int g'F$$

med $g = x$, $g' = 1$, $f = e^x \cos x$, $F' = f$, eller $F = \int f$.

Beräkna först F

$$F = \int e^x \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x = e^x \cos x + e^x \sin x - F$$

dvs

$$2F = e^x \cos x + e^x \sin x, \qquad F = \left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)/2$$

Vi har således

$$I = gF - \int g'F = x\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)/2 - \int \left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)/2$$

Den sista integralen kan beräknas

$$\int \left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)/2 = e^x \cos x$$

och vi har

$$I = x\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right)/2 - e^x \cos x = e^x \left((x/2 - 1)\cos x + (\sin x)/2)\right)$$

7) I fallet a) är f en jämn funktion $f(-x) = f(x)$ därför är de udda termerna a_{2n+1} i Taylorutvecklingen kring origo lika med noll, dvs $f^{(9)}(0) = 0$ i detta fall.

För fallet b)-c) sätter vi $f(x) = g(x^3)$. Taylorutveckal g i termer av t och sen sätt $t = x^3$ vi får

$$g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

och

$$f(x) = g(x^3) = a_0 + \cdots + a_3 x^9 + \cdots$$

Vi har $a_3 = g^{(3)}(0)/3!$ och $a_3 = f^{(9)}(0)/9!$. Med andra ord $f^{(9)}(0) = 9! g^{(3)}(0)/3! = 9! a_3$.

Nu för b) har vi $g(t) = \arctan$, och för c) har vi $g(t) = \ln(1+t)$.

Vi får således att i fallet b):

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \cdots$$

så att $a_3 = -1/3$ och $f^{(9)}(0) = 9! a_3 = -9!/3$.

I fallet c):

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots$$

så att $a_3 = 1/3$ och $f^{(9)}(0) = 9! a_3 = 9!/3$.

---

8)

Dela intervallet i två delar

$$I = \int_1^2 \frac{(3x+1)(\log x)}{x^3 - x} dx + \int_2^\infty \frac{(3x+1)(\log x)}{x^3 - x} dx$$

eftersom integranden är väl definierade på desaa intervaller och vi har i I_1 en singularitet i $x = 1$ och för I_2 är ∞-punkten problem.

För I_1 gäller det att

$$0 \le \frac{(3x+1)(\log x)}{x^3 - x} \le \left(\frac{3x+1}{x^2+x}\right) \frac{\log x}{x-1} \le \left(\frac{3 \cdot 2 + 1}{2}\right) \frac{\log x}{x-1} \le 4 \frac{\log x}{x-1}$$

Vidare är

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x-1} dx = \lim_{r \to 1^+} \int_r^2 \frac{\log x}{x-1} dx = \lim_{r \to 1^+} (\log r \log(r-1)) - \int_1^2 \frac{\log(x-1)}{x}.$$

Den sista integralen är begränsad och gränsvärdet går mot noll, t.ex. genom

$$\log r \log(r-1) = ((r-1)\log r) \left(\frac{\log(r-1)}{(r-1)}\right)$$

använd $t \log t \to 0$ då $t \to 0$ för den förrsta och L'Hopital för den andra.

Alltså I_1 är konvergent

För I_2 har vi

$$x^3 - x \ge x^3/2, \qquad \log x \le x^{1/2}, \qquad 3x + 1 \le 4x$$

då $x \ge 2$. DVS

$$0 \le \frac{(3x+1)\log x}{x^3 - x} \le \frac{4x x^{1/2}}{x^{3/2}} = 8x^{-3/2}$$

och att

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}} = 2\sqrt{2}$$

Alltså är I konvergent.