Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

Förslag till lösningar, 5B 1106, Envariabel för F1.
Tentamen torsdag 16 december 2004

1. Sätt $f(x) = x^3 - x$. Då är f kontinuerlig på $[1, 2]$. Vi har $f(0) = 0$ och $f(2) = 6$. Alltså antar f alla värden däremellan. Speciellt har ekvationen $f(x) = 1$ minst en lösning i intervallet.

2. Derivera ekvationen $y \sin x = x^3 + \cos y$ implicit med avseende på x. Vi får $y' \sin x + y \cos x = 3x^2 - y' \sin y$, som ger $y'(\sin x + \sin y) = 3x^2 - y \cos x$, och, slutligen, $y' = (3x^2 - y \cos x)/(\sin x + \sin y)$.

3. Vi skall lösa ut x ur ekvationen $y = h(x)$, dvs $y = 1+3f(2x)$, eller $\frac{1}{3}(y-1) = f(2x)$, så $2x = g(f(2x)) = g(\frac{1}{3}(y-1))$, varför $x = \frac{1}{2}g(\frac{1}{3}(y-1)) = h^{-1}(y)$.

4. $f(x) = 1 - x^2$ för $-1 \le x \le 1$ och $f(x) = x^2 - 1$ för $1 \le x \le 2$. $f'(x) = 0$ endast då $x = 0$ (som tillhör intervallet) och $f(0) = 1$. f är singulär (ej deriverbar) för $x = 1$ och $f(1) = 0$. Jämförelse mellan dessa punkter och ändpunkterna, i vilka $f(-1) = 0$ och $f(2) = 3$, visar att största värdet är 3 och minsta värdet 0.

5. Med $u = 1 - x^2$ blir $du = -2x\,dx$, varför
$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^1 = 1/3.$

6. I det givna intervallet möts de två funktionerna i punkterna $\pi/4$ och $5\pi/4$. Först är $\cos x$ störst, sedan $\sin x$ och därefter $\cos x$. Arean blir
$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx$$
$$= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} - [\sin x + \cos x]_{\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{5\pi/4}^{2\pi}$$
$$=(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}.$$

7. Skrivs summan som $\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ...)$ ser vi tydligare den geometriska serien. Summan blir $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-1/3)} = 1/4$.

8. $x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{6} + ...)$ och
$x - \tan x = (x \cos x - \sin x)/\cos x = (x(1 - \frac{x^2}{2}) - (x - \frac{x^3}{6})) + ...$, vilket ger
$(x - \sin x)/(x - \tan x) = (\frac{x^3}{6} + ...)/(-\frac{x^3}{3} + ...) = -\frac{1}{2} + ... \to -\frac{1}{2}$ då $x \to 0$.
Man kan också få fram resultatet med L'Hopitals regel.

9. Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$, med karakteristisk ekvation $r^2 + 4 = 0$, varför $r = \pm 2\mathrm{i}$. Den allmänna homogena lösningen är $y_h = C_1 \cos 2x + C_1 \sin 2x$, där C_1 och C_2 är konstanter.

   För partikulärlösningen gör vi ansatsen $y_p = Ax^2 + Bx + C$ varav $y_p'' + 4y_p = 2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C$ vilket ger $4A = 8$, $4B = 4$ och $A + 2C = 0$, med lösningen $A = 2$, $B = 1$ och $C = -1$.

   Svar: $y = C_1 \cos 2x + C_1 \sin 2x + 2x^2 + x - 1$.

10. De två kurvorna skär varandra i $x = \pm 2$. Vi får samma volym om vi roterar kurvan $y = x^2 - 4$ kring x-axeln, dvs volymen blir

    $\int_{-2}^{2} \pi(x^2 - 4)^2\, dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16)\, dx = 512\pi/15$.

11. Om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ är saken klar. Vi antar därför att $f(0) = a > 0$ och $f(1) = b < 1$. Bilda funktionen $g(x) = f(x) - x$. Då är g kontinuerlig och $g(0) = a > 0$ medan $g(1) = b - 1 < 0$. Satsen om mellanliggande värden visar att det finns c med $0 < c < 1$ så att $g(c) = 0$, dvs $f(c) = c$.

12. Låt rektangelns sidor vara x resp $2x$ och triangelns sida y. Då är $6x + 3y = 3$, dvs $2x + y = 1$. Triangelns höjd är $\sqrt{3}y/2$, så den totala arean blir

    $$A = 2x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = 2x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - 2x)^2,$$

    varför

    $$\frac{dA}{dx} = 4x + \frac{\sqrt{3}}{4}2(1 - 2x)(-2) = (4 + 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{då} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})}.$$

    Efter förenkling får vi minimivärdet (uppenbarligen är $d^2A/dx^2 > 0$)

    $$\frac{\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})}.$$

13. Vi har

    $$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{1 + x^2} - \frac{4x}{(1 + x^2)^2} = \frac{\sqrt{3}(1 + x^2) - 4x}{(1 + x^2)^2}$$

    Uttrycket i täljaren är $\sqrt{3}$ gånger $1 + x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x = (x - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 - \frac{1}{3}$, som blir $= 0$ precis då $x = 1/\sqrt{3}$ eller $x = \sqrt{3}$.

    Om $x > \sqrt{3}$ eller $x < 1/\sqrt{3}$ så är $f'(x) > 0$. För $1/\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ är $f'(x) < 0$. Följaktligen har f ett lokalt maximum i $x_1 = 1/\sqrt{3}$ och ett lokalt minimum i $x_2 = \sqrt{3}$.

Vi kan också konstatera att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\sqrt{3}\pi/2$.

I de kritiska punkterna fås värdena $f(x_1) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}$ och $f(x_2) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$, så

$f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}} > 0$.

Vidare gäller

$\frac{\sqrt{3}\pi}{2} - f(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\pi - \pi/3 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2\pi - 3\sqrt{3}) > 0$

eftersom $2 > \sqrt{3}$ och $\pi > 3$.

Nu följer:

Värden $a \leq -\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ antas aldrig.

Värden a med $-\frac{\sqrt{3}\pi}{2} < a < f(x_2)$ antas en gång.

Värdet $a = f(x_2)$ antas två gånger.

Värden a med $f(x_2) < a < f(x_1)$ antas tre gånger.

Värdet $a = f(x_1)$ antas två gånger.

Värden a med $f(x_1) < a < \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ antas en gång.

Värden $a \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ antas aldrig.

14. Enligt integralkalkylens fundamentalsats och principer för partialbråksuppdelning gäller

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

där konstanterna A, B och C skall bestämmas. Gör vi liknämnigt blir täljaren $(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C$, så $A + B = 0$, $B + C = -1$ och $A + C = 1$, med lösning $A = 1$, $B = -1$ och $C = 0$, varför

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Från den övre ekvationen (för f') ser vi att $x = 1$ är den enda kritiska punkten. Vi jämför nu f:s värden i punkterna 0, 1 och 2, och finner 0, $\ln\sqrt{2}$ samt $\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 = \ln(3/\sqrt{5})$. Här är 0 det minsta och $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ det största värdet. f:s värdemängd blir det slutna intervallet $[0, \frac{1}{2}\ln 2]$.

15. a) Om $|x| < 1$ får vi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{nx^n}{n+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = 1/(1-|x|)$. Serien är alltså absolutkonvergent, och därmed konvergent, för $|x| < 1$. Om $|x| \geq 1$ går inte den allmänna termen (dvs $\frac{nx^n}{n+1}$) mot 0. Således konvergerar serien endast då $|x| < 1$.

b) Vi skriver om koefficienten $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, vilket ger

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{x}{1-x} - g(x).$$

Då är

$$\begin{aligned} xg(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^n \, dt = \int_0^x \frac{t}{1-t} \, dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) dt = -(\ln(1-x) + x), \end{aligned}$$

varför

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1, \quad |x| < 1.$$

16. Uttrycket innanför parentesen kan skrivas

$$\left(\frac{1}{1+(1/n)^2} + \frac{1}{1+(2/n)^2} + \frac{1}{1+(3/n)^2} + \ldots.. + \frac{1}{1+(n/n)^2} \right) \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k,$$

om $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots.., n$ och $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Detta är en Riemannsumma för integralen $\int_0^1 f(x)\, dx = [\arctan x]_0^1 = \pi/4$. Vi vet att Riemannsumman konvergerar mot integralen, så svaret är $\pi/4$.

17. a) Det gäller att $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$ för alla s (kolla!), varför $x^2 = \frac{\sinh^2(t/2)}{\cosh^2(t/2)} = 1 - \frac{1}{\cosh^2(t/2)}$, så

$$\cosh^2(t/2) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Vi har $\cosh^2(t/2) = \frac{1}{4}(e^{t/2} + e^{-t/2})^2 = \frac{1}{4}(e^t + 2 + e^{-t}) = \frac{1}{2}(1 + \cosh t)$, vilket ger $\cosh t = \frac{2}{1-x^2} - 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, den första utlovade formeln.

Vi observerar härnäst, att

$$2\sinh(t/2)\cosh(t/2) = \frac{1}{2}(e^{t/2} - e^{-t/2})((e^{t/2} + e^{-t/2}) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh t,$$

varför

$$\sinh t = 2\sinh(t/2)\cosh(t/2) = 2\tanh(t/2)\cosh^2(t/2) = 2x \cdot \frac{1}{1-x^2},$$

vilket ger den andra utlovade formeln.

b) Vi löser ut t som funktion av x:

$$x = \tanh(t/2) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \quad \text{ger} \quad e^t = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{dvs} \quad t = \ln(1+x) - \ln(1-x),$$

varför

$$dt = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{2\,dx}{1-x^2}.$$

Det följer att

$$\int \frac{dt}{1+\cosh t} = \int \frac{1}{1+\frac{1+x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{2\,dx}{1-x^2} = \int dx = x + C = \tanh(t/2) + C.$$

Alltså är $\tanh(t/2)$ en primitiv funktion till $1/(1+\cosh t)$.

Man kan också mer direkt utnyttja formeln $\cosh t = \frac{1}{2}(1+\cosh t)$ ovan. Den ger integralen

$$\int \frac{dt}{2\cosh^2(t/2)} = \tanh(t/2) + C.$$