Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.
Tentamen torsdag 16 december 2004, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.
Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B). Den som har sju godkända lappskrivningar är också godkänd.
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.
Den som (under hösten 2004) blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Visa att ekvationen $x^3 - x = 1$ har en lösning i intervallet $[1, 2]$.
2. Beräkna dy/dx då $y \sin x = x^3 + \cos y$.
3. En funktion f är inverterbar med invers funktion g. Använd g för att bestämma inversen till $h(x) = 1 + 3f(2x)$.
4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x) = |x^2 - 1|$, $-1 \leq x \leq 2$.
5. Beräkna integralen $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx$.
6. Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos x$ då $0 \leq x \leq 2\pi$.
7. Beräkna summan $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$.
8. Beräkna gränsvärdet av $(x - \sin x)/(x - \tan x)$ då $x \to 0$.
9. Lös differentialekvationen $y'' + 4y = 8x^2 + 4x$.
10. Området mellan kurvan $y = x^2 - 3$ och linjen $y = 1$ roteras kring linjen (dvs $y = 1$). Bestäm volymen av den kropp som uppstår.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[0,1]$ och $0 \leq f(x) \leq 1$ för alla x. Visa att det finns ett tal c i $[0,1]$ så att $f(c) = c$. (c är en "fixpunkt" till f.)

12. Av en tråd med längd 3 bildar vi en rektangel med sidförhållandet 1:2 samt en liksidig triangel. Minimera den sammanlagda arean.

13. Bestäm hur många lösningar ekvationen $f(x) = a$ har för olika värden på a, om
$$f(x) = \sqrt{3}\arctan x + \frac{2}{1+x^2}.$$
Ledning: Det gäller att $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

14. Bestäm värdemängden till funktionen
$$f(x) = \int_0^x \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

15. a) Bestäm de x för vilka serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ konvergerar.

    b) Beräkna serien för dessa x.

16. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \ldots.. + \frac{n}{2n^2}\right).$$

17. Låt $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ och $\tanh t = \sinh t/\cosh t$.

    a) Visa att, om $x = \tanh(t/2)$, så gäller
$$\cosh t = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad \text{och} \quad \sinh t = \frac{2x}{1-x^2}.$$
Detta är motsvarigheten för hyperboliska funktioner av relationerna $\cos\theta = (1-x^2)/(1+x^2)$ och $\sin\theta = 2x/(1+x^2)$ då $x = \tan(\theta/2)$. För att få fram formlerna ovan kan man använda en relation mellan $\cosh^2$ och $\sinh^2$ som ersätter trigonometriska ettan, samt en formel motsvarande $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

    b) Bestäm en primitiv funktion till $1/(1+\cosh t)$.