Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik, TK 25 maj 2003

Förslag till lösningar, tentamen
5B 1107, Flervariabel, för F1, 030527

1. Vi skall lösa ekvationssystemet $z_x = z_y = 0$, dvs $2x - 4y + 12 = 0$ och $4x + 4y + 12 = 0$, vilket ger en punkt: $(-4, 1)$. Motsvarande värde för z är -31, varför det sökta planet har ekvation $z = -31$.

2. Kedjeregeln ger $z'_u = f_x \cdot \frac{1}{v} + f'_y \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v}(f_x + f_y)$ och
   $z'_v = f_x \cdot \frac{-u}{v^2} + f'_y \cdot \frac{-u}{v^2} = \frac{-u}{v^2}(f_x + f_y)$, så
   $uz'_u + vz'_v = \frac{u}{v}(f_x + f_y) + \frac{-u}{v}(f_x + f_y) = 0$.

3. Vi skall beräkna $D_{\mathbf{u}}f(5, -4) = \nabla f(5, -4) \cdot \mathbf{u}$, där riktningen av $\mathbf{u}$ ges av $(1, -1) - (5, -4) = (-4, 3)$ med längd 5, dvs $\mathbf{u} = (-4/5, 3/5)$. Den sökta riktningsderivatan blir $(4, 3) \cdot (-4/5, 3/5) = -7/5$.

4. Vi approximerar med f:s Taylorpolynom (av grad 2) i origo: $P_2(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f'_{xx}(0, 0)x^2 + 2f'_{xy}(0, 0)xy + f'_{yy}(0, 0)y^2) = 2 + 2x + 2y - x^2 - 4xy - 4y^2$. $(x, y) = (0.1, 0.2)$ ger $f(0.1, 0.2) \sim 2.15$.

5. $\nabla f(x, y) = (2x, -1) \neq (0, 0)$, så det finns inga kritiska punkter i områdets inre, eller annorstädes. Återstår att undersöka f på randen.

   På den vertikala delen, $x = 1$, $1/2 \leq y \leq 2$ är $f = 1 - y$ som avtar från $1/2$ till -1.

   För $y = 2x$, $0 \leq x \leq 1$, blir $f = x^2 - 2x = g(x)$, som saknar kritisk punkt i $0 < x < 1$. $g(0) = 0$ och $g(1) = -1$ fann vi i föregående steg.

   För $y = x/2$, $0 \leq x \leq 1$, ger $f = x^2 - x/2 = h(x)$. $h'(x) = 2x - 1/2 = 0$ för $x = 1/4$. $h(1/4) = -1/16$. Ändpunkterna har redan kollats.

   Jämförelse ger minsta värdet -1 och största värdet $1/2$.

6. $x^2 = 2x$ ger $x = 0$ och $x = 2$, varför $0 \leq x \leq 2$. Integralen blir
   $\int_0^2 (\int_{y=x^2}^{y=2x} (xy + 2x)\, dy)\, dx = \int_0^2 [\frac{1}{2}xy^2 + 2xy]_{y=x^2}^{y=2x}\, dx$
   $= \int_0^2 (4x^2 - \frac{1}{2}x^5)\, dx = 16/3$.

7. Volymen blir $\int_0^1(\int_0^{1-x}(1-y^2)\,dy)\,dx = \int_0^1[y-y^3/3]_0^{1-x}\,dx = \int_0^1((1-x)-(1-x)^3/3)\,dx = [-\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{12}(1-x)^4 = 5/12$.

8. Med $(P,Q)=(x+y,x-y)$ har vi $Q'_x = P'_y = 1$ överallt. Fältet är konservativt med potentialfunktion $\varphi = \frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$, så integralen $=\varphi(0,1)-\varphi(1,2)=-1$. (Alternativt: byt integrationsväg!)

9. För $z=0$ får vi $x^2+y^2=4$, så projektionen av paraboloiden på $xy-$planet är området $D: x^2+y^2\leq 4$. Med $\mathbf{N}=(-z'_x,-z'_y,1)=(-2x,-2y,1)$ gäller att integralen är $\iint_D(y,-x,4-x^2-y^2)\cdot\mathbf{N}\,dxdy = \iint_D(4-x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)\,rdr = 2\pi[2r^2-r^4/4]_0^2 = 8\pi$.

10. Varje sådan cirkel kan skrivas $x^2+y^2=R^2$, med parametrisering $x(t)=R\cos t$, $y(t)=R\sin t$. Vi måste visa att $f(x(t),y(t))$är oberoende av t. Enligt kedjeregeln är "tidsderivatan" $=f'_x x'+f'_y y' = f'_x(-R\sin t)+f'_y(R\cos t) = -yf'_x+xf'_y = 0$ enligt förutsättningen.

11. Låt $F(x,y,z)=2x+2y-z^2-2$ och $G(x,y,z)=x^3-y^3-1$. $F(1,0,0)=G(1,0,0)=0$ och Jacobideterminanten $\partial(F,G)/\partial(x,y) = -6 \neq 0$. Detta visar att de givna ytorna i närheten av punkten $(1,0,0)$ definierar x och y som funktioner av z, dvs skärningskurvan har en parametrisering $\mathbf{r}(z)=(x(z),y(z),z)$.

   Implicit derivering m.a.p. z av ekvationerna $F=0$, $G=0$ ger $2x'+2y'-2z=0$ och $3x^2x'-3y^2y'=0$. I punkten $(1,0,0)$ får vi $2x'+2y'=0$ och $3x'=0$, dvs $x'(0)=y'(0)=0$ och $\mathbf{r}'(0)=(0,0,1)$. Ytterligare en implicit derivering av ekvationerna ger $2x''+2y''-2=0$ och $6x(x')^2+3x^2x''-6y(y')^2-3y^2y''=0$. I $(1,0,0)$ blir det $2x''+2y''-2=0$ och $3x''=0$, varav $x''(0)=0$, $y''(0)=1$ som ger $\mathbf{r}''(0)=(0,1,0)$. Krökningen i punkten blir $|(0,0,1)\times(0,1,0)|/1^3=1$.

12. Uträkning visar att $(0,0)$ är en kritisk punkt och att alla andraderivator är noll i punkten. Vi studerar därför f direkt. Om $a\leq 0$ är $f\geq 0$ överallt och antar sitt minsta värde, noll, i origo. För $a>0$ kvadratkompletterar vi: $f(x,y)=(x^2-ay^2)^2+(1-a^2)y^4$. För $0<a\leq 1$ har vi samma situation som förut. Om däremot $a>1$ får vi differensen mellan två kvadrater, så f växlar tecken i varje omgivning av origo. **Svar:** $-\infty<a\leq 1$.

13. Detta är ett optimeringsproblem: sök max och min för $f(x,y)=x$ under bivillkoret $g(x,y)=4x^4+4x^3y+y^4-1=0$. Enligt Lagranges metod

måste vi undersöka var funktionernas gradienter har samma riktning. Nu är grad $f = (1, 0)$ medan grad $g = (16x^3 + 12x^2y, 4x^3 + 4y^3)$, vilket leder till $x^3 + y^3 = 0$, dvs $y = \pm x$. Insättning i bivillkorsekvationen ger $4x^4 + 4x^3 \cdot (-x) + x^4 = 1$, varav $x = \pm 1$.

Svaret är alltså intervallet $[-1, 1]$.

14. Med $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$, kan kurvorna skrivas $u = 0$ ($y = x$ vilket ger $x^2 - y^2 = 0$), $u = 1$, $v = 0$ ($y = 0$ vilket ger $xy = 0$) samt $v = 1$. D övergår alltså i kvadraten $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ under denna transformation. Med beteckningar som i boken blir Jacobideterminanten $\partial(u, v)/\partial(x, y) = 2(x^2 + 2y^2)$. Nu gäller ju att

$$2(x^2 + 2y^2)\, dxdy = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\, dxdy = dudv,$$

enligt formeln för variabelbyte i dubbelintegraler.

Integralen blir därför $\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \, dudv = \frac{1}{2}$.

15. Derivering av $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ med avs på x ger $r'_x = \frac{x}{r}$, varför $f'_x = g'(r)r'_x = \frac{x}{r}g'(r)$ Derivering en gång till leder till $f''_{xx} = \frac{x^2}{r^2}g''(r) + \frac{r^2-x^2}{r^3}g'(r)$ med motsvarande formel $f''_{yy} = \frac{y^2}{r^2}g''(r) + \frac{r^2-y^2}{r^3}g'(r)$. Addition ger $f''_{xx} + f''_{yy} = \frac{x^2+y^2}{r^2}g''(r) + \frac{r^2-x^2-y^2}{r^3}g'(r)$ och den utlovade formeln.

Vi får $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (f''_{xx} + f''_{yy})\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (g''(r) + \frac{1}{r}g'(r))\, rdr = 2\pi \int_0^1 (rg''(r) + g'(r))\, dr = 2\pi[rg'(r)]_0^2 = 2\pi g'(1) = 2\pi$.

16. Symmetri leder till

$\iint_{\mathcal{S}} x^4 \, dS = \iint_{\mathcal{S}} y^4 \, dS = \iint_{\mathcal{S}} z^4 \, dS = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (x^4 + y^4 + z^4)\, dS$

$= \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} (x^3, y^3, z^3) \cdot (x, y, z)\, dS = \frac{R}{3} \iint_{\mathcal{S}} (x^3, y^3, z^3) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$

Vi använder nu divergenssatsen! Integralen blir

$\frac{R}{3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$

$= R \int_0^R \rho^2 \cdot \rho^2 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = R \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^6/5.$

17. Detta är exempel 2 på sid 956 i Adams bok (kap 16.5). Svaret är 12π.