Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik, TK 4 maj 2003

**5B 1107, Flervariabel, för F1.**
**Tentamen tisdag 27 maj 2003, 8.00-13.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B).
För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B).
Den som har sju eller fler godkända lappskrivningar är också godkänd.
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

**LYCKA TILL!**

**Del A, uppgifter à 4 poäng.**
Den som blivit godkänd på lappskrivning $X$, $1 \leq X \leq 9$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Bestäm samtliga horisontella tangentplan till ytan $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$.

2. Visa att $uz'_u + vz'_v = 0$ om $z(u, v) = f(u/v, (u - v)/v)$ för $uv \neq 0$, där $f$ har kontinuerliga förstaderivator.

3. För funktionen $f(x, y)$ gäller $f'_x(5, -4) = 4$ och $f'_y(5, -4) = 3$. Bestäm ritningsderivatan i punkten $(5, -4)$ i riktning mot punkten $(1, -1)$.

4. Låt $f(x, y) = 2x + y + 2\cos(x + 2y)$. Bestäm, genom att approximera $f$ med ett lämpligt andragradspolynom, ett närmevärde till $f(0.1, 0.2)$.

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - y$ på området $y \leq 2x$, $x \leq 2y$, $x \leq 1$.

6. Beräkna $\iint_D (xy + 2x)\, dxdy$, där $D$ är området $x^2 \leq y \leq 2x$.

7. Beräkna volymen av kroppen mellan ytan $z = 1 - y^2$ och $xy$-planet då $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 1$.

8. Beräkna linjeintegralen $\int (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ från punkten $(1, 2)$ till punkten $(0, 1)$ längs kurvan $y = |4x - y|$.

9. Låt $\mathcal{S}$ beteckna den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$ och $0 \leq y \leq x$. Ytans enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv $z$-komponent. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} (y, -x, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$.

10. Anta att den differentierbara funktionen $f$ uppfyller $-yf'_x + xf'_y = 0$. Visa att varje cirkel med centrum i origo är en nivåkurva till $f$.

**Del B, uppgifter à 6 poäng:**

11. Ytorna $2x + 2y - z^2 = 2$ och $x^3 - y^3 = 1$ skär varandra i en kurva. Visa att kurvan i närheten av punkten $(1, 0, 0)$ har en parameterframställning på formen $\mathbf{r}(z) = (x(z), y(z), z)$. Beräkna kurvans krökning i punkten $(1, 0, 0)$. (Formeln för krökning av en kurva är $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$.)

12. Bestäm de reella tal $a$ för vilka funktionen $f(x, y) = x^4 - 2ax^2y^2 + y^4$ har ett lokalt minimum i origo.

13. Man vet att kurvan $4x^4 + 4x^3y + y^4 = 1$ är sluten. Bestäm dess projektion på $x$-axeln.

14. Beräkna integralen $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ där $D$ är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ och $x^2 - y^2 = 1$.

15. Låt $g$ vara en funktion av en variabel med kontinuerlig andraderivata, och sätt $f(x, y) = g(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Anta att $g'(1) = 1$. Beräkna integralen $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$.

    *Ledning:* härled först formeln $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r) + \frac{1}{r} g'(r)$.

16. Beräkna $\iint_{\mathcal{S}} x^4\, dS$ då $\mathcal{S}$ betecknar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

17. Låt $\mathcal{S}$ vara den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ där $z \geq 0$. Beräkna $\iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$ om vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz})$ och $\hat{\mathbf{N}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till ytan $\mathcal{S}$.