Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik, TK 030836

5B 1107, Flervariabel för F1, 27/8-03
Förslag till lösningar

1. Sätt $F = x^3z + x^2 - z^3y$. Då blir $\nabla F = (3x^2z + 2x, -z^3, x^3 - 3z^2y)$, så tangentplanets normal är $\mathbf{N} = \nabla F(1,1,1) = (5,-1,-2)$ och planets ekvation blir således $5(x-1) - (y-1) - 2(z-1) = 0$.

2. Enligt kedjeregeln är, om $u = y^2 - x$ och $v = x^2 - y$, $g_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = -f'_u + 2xf'_v$. Analogt blir $g_y = 2yf'_u - f'_v$.

3. Eftersom
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+y}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}$$
blir $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Vidare är $\mathbf{u} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Formeln $D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{u}$ ger $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Här är $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y$ medan $\frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y^2$. Att dessa båda antar värdet noll betyder att $x = y$ och $y^2 = x$, med lösningarna $(0,0)$ och $(1,1)$.

   Vi undersöker andraderivatorna. Dessa är $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$ och $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y$. Diskriminanten $AC - B^2 = 72y - 36$. Denna är < 0 i origo: sadelpunkt, och > 0 i $(1,1)$: lokalt minimum, eftersom också $A > 0$.

5. f:s gradient är $(y^2, 2xy)$ och blir $= (0,0)$ precis då $y = 0$ (och x är godtyckligt). Då blir $f = 0$.

   På den del av randen där $y = x$ blir $f = x^3$ och $-1/\sqrt{2} \le x \le 1/\sqrt{2}$, så värdena växer från $-1/(2\sqrt{2})$ till $+1/(2\sqrt{2})$.

   På cirkeldelen gäller $f = x(1-x^2) = g(x)$, $-1/\sqrt{2} \le x \le 1/\sqrt{2}$. $g'(x) = 1 - 3x^2$, dvs vi har kritiska punkter för $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Motsvarande värden blir $g(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm 1/\sqrt{3}(1 - 1/3) = \pm 2/(3\sqrt{3})$.

   Nu gäller att $(1/(2\sqrt{2}))^2 = 1/8$ och $(2/(3\sqrt{3}))^2 = 4/(27)$ och $4/(27) > 4/(32) = 1/8$. Alltså är f:s största resp minsta värden $\pm 2/(3\sqrt{3})$.

6. D begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $x + y = 1$. Integralen blir $\int_0^1 (\int_0^{1-x} (x^3 - y)\, dy)\, dx = \int_0^1 [x^3 y - \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^{1-x}\, dx$
$= \int_0^1 (x^3(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$.

7. Med de konventioner för sfäriska koordinater som använts i Adams, sid 859, blir den första ekvationen $\rho^2 \leq 4$, dvs $0 \leq \rho \leq 2$ (eftersom $\rho \geq 0$ alltid). Den andra ekvationen, $0 \leq x \leq y$, innebär att (den polära) vinkeln θ rör sig mellan 45 och 90 grader, dvs $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$. Den sista ekvationen, $z \geq 0$ innebär att vi stannar kvar på den övre halvsfären, varför vinkeln ϕ måste uppfylla $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

8. Vi parametriserar kurvan som $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t : 0 \to \frac{3\pi}{2}$. Integralen blir
$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (y(t)x'(t) - x(t)y'(t))\, dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\cos t(-\cos t) - \sin t \sin t)\, dt = -\frac{3\pi}{2}$.

9. Vi har normalriktning $\mathbf{N} = (2x, 2y, 1)$ och skall integrera över D: $x^2 + y^2 \leq 1$ (eftersom $z \geq 0$). Flödesintegralen blir
$\iint_D (-y, x, z(x,y)) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dxdy$
$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = \pi/2$.

10. Varje cirkel med centrum i origo kan parametriseras som $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, där $R > 0$ är cirkelns radie. Vi skall visa att $f(R\cos t, R\sin t)$ är konstant, dvs oberoende av vinkeln t. Derivering med avseende på t ger, enligt kedjeregeln,
$$\frac{d}{dt} f(R\cos t, R\sin t) = f'_x \cdot (-R\sin t) + f'_y \cdot R\cos t = -y f'_x + x f'_y = 0$$
enligt förutsättningen. Saken är klar!

11. Vi måste visa att $f(x, y)$ går mot $f(0, 0) = 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$.
I polära koordinater, $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, blir $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2} = r\cos\theta\sin\theta$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Alltså är $|f(x, y)| \leq |r\cos\theta\sin\theta| \leq r$, ty $|\sin\theta| \leq 1$, $|\cos\theta| \leq 1$ överallt. Att $(x, y) \to (0, 0)$ betyder $r \to 0$.
Eftersom f är noll längs x-axeln blir $f(x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0$. $x \to 0$ ger oss gränsvärdet $f'_x(0, 0) = 0$. Likadant för $f'_y(0, 0)$.

Differentierbarhet i origo betyder att uttrycket

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - xf'_x(0,0) - yf'_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

I vårt fall blir kvoten $xy/(x^2+y^2)$. Detta uttryck går inte mot 0 i origo. (Längs x-axeln är kvoten 0, längs linjen $y = x$ är den 1/2.)

12. Sätt $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^y - y^3$ och kalla hela uttrycket $z = g(x,y)$. Enligt kedjeregeln är $z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$ och i vårt fall blir detta $z'_x = 3(x^2-y^2)f'_u + 6xyf'_v$. Ytterligare en derivering map x ger

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 6xf'_u + 6yf'_v + 3(x^2-y^2)(f''_{uu}u'_x + f''_{uv}v'_x) + 6xy(f''_{vu}u'_x + f''_{vv}v'_x) \\ &= 6xf'_u + 6yf'_v + 3(x^2-y^2)(3(x^2-y^2)f''_{uu} + 6xyf''_{uv}) \\ &\quad + 6xy(3(x^2-y^2)f''_{vu} + 6xyf''_{vv}) \\ &= 6(xf'_u + yf'_v) + (3(x^2-y^2))^2 f''_{uu} + 12xy(3(x^2-y^2))f''_{uv} + (6xy)^2 f''_{vv}, \end{aligned}$$

där vi har använt att $f''_{uv} = f''_{vu}$.

Helt analogt får vi först $z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -6xyf'_u + 3(x^2-y^2)f'_v$ och sedan

$$z''_{yy} = -6(xf'_u + yf'_v) + (-6xy)^2 f''_{uu} - 12xy(3(x^2-y^2))f''_{uv} + (3(x^2-y^2))^2 f''_{vv}.$$

Härav följer $z''_{xx} + z''_{yy} = ((3(x^2-y^2))^2 + (6xy)^2)(f''_{uu} + f''_{vv})$. Uppenbarligen blir $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ så snart $f''_{uu} + f''_{vv} = 0$.

13. $F = xe^y + uz - \cos v$ och $G = u\cos y + x^2 v - yz^2$. Villkoret för att kunna lösa utt u och v är att Jacobideterminanten (beteckningar som i Adams. kap 12.8) $J = \partial(F,G)/\partial(u,v) \neq 0$ i punkten, som vi kallar P_0. Här får vi

$$J = \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix}_{P_0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

är alltså uppfyllt.

För att beräkna u'_z använder vi formler motsvarande dem i Ex 6, p 757, i Adams:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(P_0) = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}(P_0) = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} u & \sin v \\ -2yz & x^2 \end{vmatrix}_{P_0} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

14. Vi maximerar $f(x,y) = x^2 + y^2$ då $g(x,y) = x^2 + y^6 = 1$. Enl Lagrange skall ∇f och ∇g vara parallella, dvs $(2x, 2y) = t(2x, 6y^5)$. Vi kan utesluta $t = 0$, varav $y = 3y^5$, med lösningarna $y = 0$ och $y^2 = 1/\sqrt{3}$. Detta ger $x^2 = 1$ resp $x^2 = 1 - 1/(3\sqrt{3})$ och sålunda $f = 1$ resp $f = 1 - 1/(3\sqrt{3}) + 1/\sqrt{3} = 1 + 2/(3\sqrt{3})$, som är det största värdet. Korridorens minsta bredd blir två gånger roten ur detta värde.

15. Avståndet mellan planet och origo är $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (och antas i punkten $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$). Vrid till koordinater (u, v, w) som gör att planet blir parallellt med (u, v)-planet. Detta påverkar inte volymen. Den kalott vars volym vi skall bestämma beskrivs nu av $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq w \leq 1$, $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Vi beräknar volymen som $V = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} A(w)\, dw$, där $A(w)$ är arean av den skiva som fås för konstant w, en cirkel med radie $\sqrt{1 - w^2}$, dvs $A(w) = \pi(1 - w^2)$. Vi får
$V = \int_a^1 \pi(1 - w^2)\, dw = \pi(2 - 3a + a^3)/3$, med $a = 1/\sqrt{3}$.

16. Vi skall använda areaformeln: om C omsluter området D gäller att $A(D) = \frac{1}{2} \int_C -y\, dx + x\, dy$. Insättning av $y = tx$ i kurvans ekvation $(x^3 + y^3 = 3xy)$ ger $x = 3t/(1 + t^3)$, $y = 3t^2/(1 + t^3)$. För att få med hela den del av kurvan som ligger i första kvadranten måste $t : 0 \to \infty$, t är ju lutningen av en linje. Nu är kurvan symmetrisk i x och y, och delas i tu av lutningen $t = 1$, dvs linjen $y = x$. Alltså blir arean

$$A(D) = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 -y\, dx + x\, dy = \int_0^1 (-tx(t)(x(t))' + x(t)(tx(t))')\, dt$$
$$= \int_0^1 x^2(t)\, dt = \int_0^1 \frac{9t^2}{(1 + t^3)^2}\, dt = 3 \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2}.$$

17. Vi skall använda Stokes sats: den sökta integralen är $= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, där ytan S har C som rand. S kan väljas på olika sätt. Det blir enklare om vi tar den del av ytan $z = x^2 + 1$ som ligger innanför skärningen mellan $z = x^2 + 1$ och ytan $z = 2x^2 + y^2$. På skärningen gäller $x^2 + 1 = 2x^2 + y^2$ och därmed $x^2 + y^2 = 1$. Normalen för S är $\mathbf{N} = -(-2x, 0, 1) = (2x, 0, -1)$. $\nabla \times \mathbf{F} = (-x, 3y, -2z)$ vilket blir $= (-x, 3y, -2(x^2 + 1))$ på ytan. Integralen blir därför

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-x, 3y, -2(x^2 + 1)) \cdot (2x, 0, -1)\, dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2\, dxdy = 2\pi.$$