Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik

5B 1107, Flervariabel, för F1.
Tentamen onsdag 27 augusti 2003, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B).
För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B).
Den som har sju eller fler godkända lappskrivningar är också godkänd.
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.
Den som blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 9$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Bestäm tangentplan och normallinje till ytan $x^3z + x^2 - z^3y = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

2. Beräkna $\partial g/\partial x$ och $\partial g/\partial y$ då $g(x, y) = f(y^2 - x, x^2 - y)$ och f har kontinuerliga förstaderivator.

3. Låt $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{1+y}\right)$. Beräkna riktningsderivatan $D_{\mathbf{u}}f$ i origo, i den riktning som ges av vektorn $(-1, 1)$.

4. Finn och klassificera de kritiska punkterna till $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$.

5. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = xy^2$ på området $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq x$.

6. Beräkna $\iint_D (x^3 - y)\, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

7. Definiera med figur sfäriska koordinater, och uttryck den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ där $0 \leq x \leq y$ och $z \geq 0$ i dessa.

8. Beräkna $\int y\,dx - x\,dy$ moturs längs enhetscirkeln från $(1, 0)$ till $(0, -1)$).

9. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} (-y, x, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$ då $\mathcal{S}$ är den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv z-komponent.

10. Anta att den differentierbara funktionen f uppfyller $-yf'_x + xf'_y = 0$. Visa att varje cirkel med centrum i origo är en nivåkurva till f.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Givet funktionen $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig i origo. Visa också att de partiella derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ existerar och beräkna dem. Undersök slutligen om f är differentierbar i origo.

12. Anta att $f(u, v)$ är harmonisk, dvs $f''_{uu} + f''_{vv} = 0$. Visa att då är också $g(x, y) = f(x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ harmonisk: $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$. Vi antar att f har kontinuerliga derivator av ordning två.

13. Visa att i ekvationerna $xe^y + uz - \cos v = 2$ och $u \cos y + x^2v - yz^2 = 1$ kan u och v lösas ut som funktioner av x, y och z nära den punkt där $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ och $(u, v) = (1, 0)$ och beräkna derivatan $\partial u/\partial z$ i punkten.

14. Kanten till ett ovalt bord beskrivs av kurvan $x^2 + y^6 = 1$, där x och y anges i meter. Hur bred är den smalaste korridor i vilken bordet kan vridas 180 grader?

15. Planet $x + y + z = 1$ delar enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ i två delar. Beräkna volymen av den mindre delen.

16. Den del av kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ som ligger i första kvadranten är rand till ett begränsat område D, "Descartes löv". Man kan visa att kurvan inte skär sig själv. Beräkna arean av D genom att använda lutningen t som parameter: $y = tx$ ger $x = 3t/(1 + t^3)$ och $y = 3t^2/(1 + t^3)$.

17. Beräkna linjeintegralen $\int_C 3yz\,dx + xz\,dy$ då C är skärningskurvan mellan cylindern $z = x^2 + 1$ och paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$. Sett från origo genomlöps kurvan medurs.