Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Flervariabel för F1.
Tentamen tisdag 13 april 2004
Förslag till lösningar

1. Med $f(x,y) = \sqrt{1+x^3y^2}$ och $(a,b) = (3,2)$ är ekvationen $z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$. Här är $f(3,2) = \sqrt{109}$, $\nabla f = (3x^2y^2/(2\sqrt{1+x^3y^2}), 2x^3y/(2\sqrt{1+x^3y^2})) = (\frac{54}{\sqrt{109}}, \frac{54}{\sqrt{109}})$ i punkten. Ekvationen blir $z = \sqrt{109} + \frac{54}{\sqrt{109}}((x-3)+(y-2))$.

2. Med $u = y^2 - xy$ och $v = x^2$ ger kedjeregeln $g'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = -yf'_u + 2xf'_v$.

3. Här är $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ och f är differentierbar, varför $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{v}$.

   $\nabla f = (x/(1+x^2+2y^2), 2y/(1+x^2+2y^2)) = (-1/10, 2/5)$ i punkten, ger $f'_{\mathbf{v}}(-1,2) = 13/50$.

4. $\nabla f = (3(x^2-y), 3(y^2-x)) = (0,0)$ precis då $y = x^2$ och $x = y^2$, med lösningarna $(0,0)$ och $(1,1)$. Det gäller att $A = f''_{xx} = 6x$, $B = f''_{xy} = -3$ och $C = f''_{yy} = 6y$.

   I $(0,0)$ blir $(A,B,C) = (0,-3,0)$ och $AC - B^2 < 0$: sadelpunkt.

   I $(1,1)$ blir $(A,B,C) = (6,-3,6)$ och $AC - B^2 > 0$. Då $A > 0$ är detta ett lokalt minimum.

5. Triangeln begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 1$ och $y = x$. Upprepad integration visar att integralen kan skrivas

   $\int_0^1 \left(\int_{y=x}^1 (x^2 - y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2y - y^3 \right]_{y=x}^1 dx = \int_0^1 -\frac{2}{3}x^3\, dx = -\frac{1}{6}$.

6. Hastigheten är vektorn $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt = (4\cos t, 4\sin t, 3)$ och farten $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = 5$. Accelerationen är vektorn $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt = (-4\sin t, 4\cos t, 0)$. Kurvans längd är $\int ds = \int_0^{2\pi} v(t)\, dt = 10\pi$.

7. Greens formel visar att kurvintegralen är $\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - (\frac{\partial}{\partial y}(-xy^2) \right) dxdy$, där D begränsas av linjerna $y = 0$, $y = 1 + x$ och $y = 1 - x$. Här är det bäst att integrera med avseende på x först (annars fås två integraler). Vi får

   $\int_0^1 \left(\int_{-(1-y)}^{1-y} (2y + 2xy)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[2xy \right]_{x=-(1-y)}^{1-y} dy = \int_0^1 4(1-y)y\, dy = 2/3$.

8. På ytan är $z = z(x,y) = 2(1-x-y)$ då $(x,y) \in D$ och D ges av $x \geq 0$, $y \geq 0$ samt $x+y \leq 1$. Med $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2,2,1)$ blir flödesintegralen $\iint_D (\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}y^2, z(x,y)) \cdot \mathbf{N}\, dxdy = \iint_D (y^2 + x^2 + 2(1-x-y))\, dxdy$ $= \int_0^1 \big(\int_0^{1-x} (y^2 + x^2 + 2(1-x) - 2y)\, dy \big)\, dx = ... = 1/2.$

9. Vi ska använda formeln $\kappa(t) = |\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t)|/v(t)^3$ för en kurvas krökning i punkten $\mathbf{r}(t)$. I vårt fall är $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t, 0)$, varför $\mathbf{v}(t) = (-3\sin t, 2\cos t, 0)$, $v(t) = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}$ och $\mathbf{a}(t) = (-3\cos t, -2\sin t, 0)$. Uträkning ger $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{v}(t) = (0,0,-6)$, varav $\kappa(t) = 6/(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}$. Största värdet uppstår då $\sin t = 0$ $(y = 0)$ och blir $6/2^3 = 3/4$. Minsta värdet erhålles då $\cos t = 0$ $(x = 0)$ och blir $6/3^3 = 2/9$. Svaret är alltså $2/9 \leq \kappa \leq 3/4$.

10. a) Från uppgift 3 får vi div grad $f =$
$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{1+x^2+2y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{1+x^2+2y^2} = \frac{1-x^2+2y^2}{(1+x^2+2y^2)^2} + \frac{1+x^2-2y^2}{(1+x^2+2y^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2+2y^2)^2}.$

    b) Uttrycket saknar mening: vi kan inte ta gradienten av vektorn rot $\mathbf{F}$.

    c) grad div $\mathbf{F}$ = grad $(1-1+1) = (0,0,0)$.

    d) Generellt gäller (kriteriet för konservativa fält) att rot grad $f = (0,0,0)$.

11. a) Vi söker största och minsta värde av av den kontinuerliga funktionen $f = x^3 + 3x + y^3 + 3y$ på den slutna och begränsade mängden $g = x^2 + y^2 - 1/2 = 0$. Lagranges metod ger att ∇f och ∇g skall vara parallella, dvs $0 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 6((x^2+1)y - x(y^2+1))$ vilket ger $y = x$. Insättning i bivillkorsekvationen ger $x = \pm 1/2$, varav $(x,y) = \pm(1/2, 1/2)$. Vi får största värde $f(1/2,1/2) = 13/4$ och minsta värde $f(-1/2,-1/2) = -13/4$.

    b) Eftersom $7/2$ är större än f:s största värde då $g = 0$ så kan de två kurvorna inte ha några gemensamma punkter.

12. Låt P' beteckna reflektionen av P i xy-planet, dvs $P' = (2,1,-2)$, och kalla skärningspunkten mellan sträckan $P'Q$ och xy-planet för R. Detta ger minimum: det är kortaste sträckan mellan P' och Q och sträckorna PR och $P'R$ är lika. Linjen genom P' och Q kan parametriseras som $P' + t(Q - P') = (2+3t, 1+4t, -2+5t)$. Den skär xy-planet då $t = 2/5$, vilket ger $R = (16/5, 13/5, 0)$.

13. a) Allmänt gäller att dx/dy och dz/dy fås genom att derivera båda ekvationerna $F = 0$ och $G = 0$ med avseende på y:
$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy} = 0$ och $\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dy} = 0.$
$\frac{\partial G}{\partial z}$ gånger första ekvationen minus $\frac{\partial F}{\partial z}$ gånger andra ekvationen ger

$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y}$, dvs $\frac{dx}{dy} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}$.

$F = x^2 + y^2 + z^2$ och $G = e^x + e^y + e^z$ ger $\frac{dx}{dy} = (ye^z - ze^y)/(ze^x - xe^z)$.

b) Som ovan får vi $\frac{dy}{dz} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ och $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$, så att

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\;\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\;\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\;\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\;\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = 1, \quad \text{vilket skulle visas.}$$

14. Vi går över till polära koordinater: $x^2 + y^2 \le x$ ger $r \le \cos\theta$ och $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ (ty $x \ge 0$) och integralen blir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} r \cdot r\, dr\right) d\theta =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{9}$.

15. Här skall man byta väg: villkoret $\frac{\partial}{\partial x}(2y - 3y^4)e^{x-y^3} = \frac{\partial}{\partial y} y^2 e^{x-y^3}$ är uppfyllt, och fältets komponenter har kontinuerliga derivator i hela planet. Vi ser att den föreslagna kurvan har samma ändpunkter som kurvan $C_1 : x = y^3$, $y : 0 \to 2$. Kurvintegralen blir
$\int_{C_1} y^2\, dx + (2y - 4y^3)\, dy = \int_0^2 (y^2 \frac{dx}{dy} + 2y - 4y^3)\, dy = \int_0^2 2y\, dy = 4$.

16. (Detta är exempel 16.5.2 i Adams.) Låt C vara cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planet, ett varv moturs. Enligt Stokes sats är integralen
$= \int_C y^2\, dx + x^3\, dy =$ [Greens formel] $= \iint_D (3x^2 - 2y)\, dxdy$
$= \iint_D 3x^2\, dxdy = \frac{3}{2}\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$,
där D betecknar området $x^2 + y^2 \le 4$. Övergång till polära koordinater ger integralen $\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2 \cdot r dr\, d\theta = 12\pi$.

17. Detta är en variant av divergenssatsen, och finns i Adams kap 16.4, Th. 9 (a). Man kan härleda den som följer: Låt $\widehat{\mathbf{N}} = (n_1, n_2, n_3)$ och $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Rotationen till $\mathbf{F}$ kan skrivas
$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$,
där ∂_i betecknar derivation m. avs. på variabel nummer i. Uträkning ger
$\widehat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F} = (F_3 n_2 - F_2 n_3, F_1 n_3 - F_3 n_1, F_2 n_1 - F_1 n_2)$.
Enligt divergenssatsen är
$\iint_S (F_3 n_2 - F_2 n_3)\, dS = \iint_S (0, F_3, -F_2) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\, dV$.
Analogt fås $\iint_S (F_1 n_3 - F_3 n_1)\, dS = \iiint_K (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\, dV$
och $\iint_S (F_2 n_1 - F_1 n_2)\, dS = \iiint_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dV$, vilket visar påståendet.