Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Flervariabel för F1.
Tentamen tisdag 13 april 2004, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.
Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B). Den som har sju eller fler godkända lappskrivningar är också godkänd.
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, 10 uppgifter à 4 poäng.
Den som blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 8$, ($1 \leq X \leq 9$ för studenter med bonus från VT 2003) hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \sqrt{1 + x^3y^2}$ i den punkt där $(x, y) = (3, 2)$.

2. Beräkna $\partial g/\partial x$ då $g(x, y) = f(y^2 - xy, x^2)$ och f är differentierbar.

3. Bestäm riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(-1, 2) = D_{\mathbf{v}}f(-1, 2)$ i riktningen $(3, 4)$ då $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2 + 2y^2)$.

4. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^2 - y^2)\, dxdy$ över triangeln D med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$.

6. Bestäm hastighet, acceleration, fart och längd av den parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = (4\sin t, -4\cos t, 3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Beräkna kurvintegralen $\int_C -xy^2\, dx + 2xy\, dy$ där C är den positivt orienterade randen till triangeln med hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$.

8. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} (\frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}x^2, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$ då $\mathcal{S}$ är den del av planet $z + 2x + 2y = 2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv tredjekomponent.

9. Vilka värden antar krökningen på ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$?

10. Låt $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 + 2y^2)$ och $\mathbf{F} = (yz + x, xz - y, xy + z)$. Avgör vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem i förekommande fall:

    a) div grad f, b) grad rot $\mathbf{F}$ c) grad div $\mathbf{F}$, d) rot grad f.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. a) Bestäm största och minsta värde av $x^3 + 3x + y^3 + 3y$ då $x^2 + y^2 = 1/2$.

    b) Undersök om kurvorna $x^3 + 3x + y^3 + 3y = 7/2$ och $x^2 + y^2 = 1/2$ skär varandra.

12. Låt P och Q beteckna punkterna $(2, 1, 2)$ respektive $(5, 5, 3)$. Bestäm den punkt R i xy-planet som minimerar $|PR| + |QR|$ (summan av avstånden mellan P och R samt Q och R). *Ledning:* R måste ligga på linjen genom $(2, 1, 0)$ och $(5, 5, 0)$.

13. Ekvationerna $F(x, y, z) = 0$ och $G(x, y, z) = 0$ definierar lokalt två variabler av x, y och z som funktion av den tredje variabeln.

    a) Beräkna $\frac{dx}{dy}$ om $F = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ och $G = e^x + e^y + e^z - 4$.

    b) Visa i det allmänna fallet att $\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 1$.

14. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ då D ges av $x^2 + y^2 \leq x$.

15. Beräkna kurvintegralen $\int_C y^2 e^{x-y^3}\, dx + (2y - 3y^4)e^{x-y^3}\, dy$, där C går först från origo till $(8, 0)$ längs x-axeln och därifrån rakt upp till $(8, 2)$.

16. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \operatorname{rot}(y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz}) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, om S är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ där $z \geq 0$. Enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ pekar ut från sfären.

17. Låt K vara ett öppet begränsat område med rand S och yttre enhetsnormal $\widehat{\mathbf{N}}$, och anta att komponenterna till vektorfältet $\mathbf{F}$ har kontinuerliga derivator. Visa formeln $\iint_S \widehat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F}\, dS = \iiint_K \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dV$, där integrationen sker komponentvis.