Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

**Tentamen 5B 1107, Flervariabel för F1, tisdag 13 april 2004**
**Förslag till lösningar**

1. a) Sätt $f(x,y) = x^2 - y^2$. Då är $\nabla f = (2x, -2y)$, så $\nabla f(\sqrt{5}, 2) = (2\sqrt{5}, -4)$. Tangentplanets ekvation blir $z - 1 = 2\sqrt{5}(x - \sqrt{5}) + (-4)(y - 2)$.

   b) $x^2 - y^2 = 1$ är en nivåkurva till $f$. Normal(riktning) till nivåkurvan är $f$:s gradient i punkten, i vårt fall $\mathbf{N} = \nabla f(\sqrt{5}, 2) = (2\sqrt{5}, -4)$.

2. Kedjeregeln ger

   $xz'_x + yz'_y = x(z'_u u'_x + z'_v v'_x) + y(z'_u u'_y + z'_v v'_y) = x(2xz'_u + yz'_v) + y(-2yz'_u + xz'_v) = 2(x^2 - y^2)z'_u + 2xyz'_v = 2uz'_u + 2vz'_v$.

3. a) Normera om riktningen $(-1,1)$ till enhetsvektorn $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Vi söker $D_{\mathbf{v}}f(0,1) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(0,1)$ (skalärprodukt). $\nabla f = (-1, 2y)e^{-x+y^2}$, som blir $(-1,2)e$ i punkten, varför $D_{\mathbf{v}}f(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \cdot (-1,2)e = 3e/\sqrt{2}$.

   b) Det maximala värdet för $D_{\mathbf{u}}f(0,1)$ är $|\nabla f(0,1)| = |(-1,2)|e = \sqrt{5}e$. Alla värden i intervallet $[-\sqrt{5}e, \sqrt{5}e]$ antas för något $\mathbf{u}$. Eftersom $\sqrt{5}e > 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ antas detta värde.

4. $\nabla f = (4(x^3 - y), 4(y^3 - x))$ som blir $(0,0)$ precis då $y = x^3$ och $x = y^3$, vilket ger de tre punkterna $(0,0)$, och $\pm(1,1)$. (Observera att $x$ och $y$ måste ha samma tecken.) Andraderivatorna blir $A = f''_{xx} = 12x^2$, $B = f''_{xy} = -4$ och $C = f''_{yy} = 12y^2$.

   I punkten $(0,0)$ blir $AC - B^2 = -B^2 < 0$: **sadelpunkt**.

   I punkterna $\pm(1,1)$ blir $AC - B^2 = 144 - 16 > 0$. Eftersom dessutom $A > 0$ har $f$ **lokala minima** i båda punkterna.

5. Kritiska punkter i det inre av området: $\nabla f = (y^2, 2xy) = (0,0)$ endast då $y = 0$. På detta linjesegment är $f = 0$.

   Randen: För $x^2 + y^2 = 1$ blir $f = x(1 - x^2) = g(x)$, $-1 \le x \le 1/\sqrt{2}$. $g'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ då $x = \pm 1/\sqrt{3}$, som tillhör intervallet. I dessa punkter antas värdena $\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$. I intervallets ändpunkter antas värdena $g(-1) = 0$ respektive $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

   På linjestycket gäller $y = x$, varför $f = x^3$ som är växande, antar största och minsta värden i ändpunkterna. Dessa har redan undersökts.

Att $\frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ser man genom att kvadrera båda led. Slutsatsen är att största och minsta värdena är $\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

6. Här bör man integrera med avseende på $x$ först. Vi har gränserna $-(1-y^2) \leq x \leq 1-y^2$, och $0 \leq y \leq 1$, så integralen blir $\int_0^1 y \cdot 2(1-y^2)\,dy = 1/2$.

7. Enligt boken är $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$, där $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, och vinkeln $\phi$ mäts från positiva $z$-axeln, medan $\theta$ är den vanliga vinkeln i planet, mätt från positiva $x$-axeln.

   $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ betyder att $0 \leq \rho \leq 2$. $0 \leq y \leq x$ kan skrivas som $0 \leq \theta \leq \pi/4$. $z \geq 0$ blir $0 \leq \phi \leq \pi/2$

8. Med $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ gäller att integralen är

   $\iint_D (-y, x, z(x,y)) \cdot \mathbf{N}\,dxdy = \iint_D z(x,y)\,dxdy = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy,$

   där integrationsområdet $D$ är ytans projektion på $xy$-planet. $z = 0$ ger enhetscirkeln $x^2+y^2 = 1$, så $D$ är området innanför enhetscirkeln, dvs $x^2+y^2 \leq 1$. Övergång till polära koordinater ger dubbelintegralen

   $\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r dr d\theta = 2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

9. Kurvan $C$ kan skrivas som $C_1+C_2$. På $C_1$ är $x = 3$ och parametern $y: 0 \to 3$. Kurvintegralen över $C_1$ blir $\int_{C_1}(2x-y)\,dy = \int_0^3 (6-y)\,dy = 27/2$.

   På $C_2$ gäller $y = x$ och parametern $x : 3 \to 0$. Kurvintegralen över $C_2$ blir $\int_{C_2}(x+2y+y^2)\,dx + (2x-y)\,dy = \int_3^0 (x+2x+x^2+2x-x)\,dx = \int_3^0 (4x+x^2)\,dx = -27$.

   Totalt får vi kurvintegralens värde $-27/2$.

10. Betrakta en godtycklig cirkel med centrum i origo, säg $x^2+y^2 = R^2$. Den kan parametriseras som $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi skall visa att $f(R\cos t, R\sin t)$ inte beror av parametern $t$. Enligt kedjeregeln är

    $\frac{d}{dt}f(R\cos t, R\sin t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x(-R\sin t) + f'_y R\cos t = -yf'_x + xf'_y = 0$

    enligt förutsättningen.

11. I polära koordinater blir $f(x,y) = \frac{r^3\cos^3\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^4} = r\cos^3\theta\sin^2\theta$, så $|f(x,y)| \leq r \to$ då $(x,y) \to (0,0)$, dvs $f$ är kontinuerlig i origo.

    Längs koordinataxlarna är $f = 0$ så båda partiella derivatorna existerar i origo och är $= 0$.

    För att undersöka om $f$ är differentierbar i origo bildar vi kvoten

    $$\frac{f(x,y) - f(0,0) - xf'_x(0,0) - yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} = \cos^3\theta\sin^2\theta$$

som saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. T ex är uttrycket 0 längs axlarna, men inte då $\theta = \pi/4$. Speciellt gäller att kvoten *inte* går mot noll. $f$ är därmed *inte* differentierbar i origo.

12. Uppgiften är helt analog med Ex 9, §12.5, i Adams, men leder till besvärligare räkningar. Låt oss därför starta mer allmänt med $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, så att $z = z(x, y)$ och beräkna $z''_{xx} + z''_{yy}$ (för allmänna $u$ och $v$).

    Enligt kedjeregeln är $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$, så $z''_{xx} = z'_u u''_{xx} + z'_v v''_{xx} + (\frac{\partial}{\partial x} z'_u)u'_x + (\frac{\partial}{\partial x} z'_v)v'_x$ (derivering av produkt).

    Nu är $\frac{\partial}{\partial x} z'_u = [w = z'_u] = w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x [$ kedjeregeln för $w] = (z'_u)'_u u'_x + (z'_u)'_v v'_x = z''_{uu} u'_x + z''_{uv} v'_x$, och, helt analogt, $\frac{\partial}{\partial x} z'_v = z''_{vu} u'_x + z''_{vv} v'_x$, så att

    $z''_{xx} = z'_u u''_{xx} + z'_v v''_{xx} + z''_{uu}(u'_x)^2 + z''_{vv}(v'_x)^2 + 2z''_{uv} u'_x v'_x,$

    där vi använt $z''_{uv} = z''_{vu}$. På samma sätt fås

    $z''_{yy} = z'_u u''_{yy} + z'_v v''_{yy} + z''_{uu}(u'_y)^2 + z''_{vv}(v'_y)^2 + 2z''_{uv} u'_y v'_y,$

    varför

    $$z''_{xx} + z''_{yy} = z'_u(u''_{xx} + u''_{yy}) + z'_v(v''_{xx} + v''_{yy})$$
    $$+z''_{uu}((u'_x)^2 + (u'_y)^2) + z''_{vv}((v'_x)^2 + (v'_y)^2) + 2z''_{uv}(u'_x v'_x + u'_y v'_y).$$

    Detta är den allmänna transformationsformeln. Anta nu att

    $$(1)\quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \qquad (2)\quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0,$$
    $$(3)\quad (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2, \qquad (4)\quad u'_x v'_x + u'_y v'_y = 0.$$

    Då får vi

    $$z''_{xx} + z''_{yy} = ((u'_x)^2 + (u'_y)^2)(z''_{uu} + z''_{vv}).$$

    Speciellt gäller att $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ om $z''_{uu} + z''_{vv} = 0$. Det återstår att visa (1)-(4) i vårt fall: $u = -y/(x^2 + y^2)$, $v = x/(x^2 + y^2)$. Uträkning ger $u'_x = 2xy/(x^2+y^2)^2$, $u'_y = (-x^2+y^2)/(x^2+y^2)^2$, $v'_x = (-x^2+y^2)/(x^2+y^2)^2$, $v'_y = -2xy/(x^2 + y^2)^2$ dvs $\nabla v = (v'_x, v'_y) = (u'_y, -u'_x)$. Detta ger (4), som ju säger att $u$ och $v$ har ortogonala gradienter. Uppenbarligen följer även (3) härav. Vidare gäller att $v''_{xx} + v''_{yy} = (u'_y)'_x - (u'_x)'_y = 0$, dvs (2). (1) följer på samma sätt. Saken är klar!

13. I fallet med enhetscirkeln kan vi vrida den liksidiga, areamaximerande, triangeln så att dess hörn är punkterna $(1, 0)$ och $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Höjden är $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ och basen $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Den maximala arean är alltså $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ i detta fall.

    Anta att maximal area fås i $xy$-planet för triangeln $D$. Sätt $x = 2u$, $y = 3v$, så att ellipsen överförs i enhetscirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Låt $D_1$ vara den triangel som fås i $uv$-planet, som bild av $D$. Då är arean av $D$

$= \iint_D dxdy = \iint_{D_1} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \iint_{D_1} 2\cdot 3\, dudv = 6A(D_1)$.

För att få maximalt värde måste $A(D_1) = 3\sqrt{3}/4$, vilket ger $A(D) = 9\sqrt{3}/2$.

14. På skärningen mellan ytorna gäller $x^2 + y^2 = 4(1 - x - y)$, vilket efter kvadratkomplettering kan skrivas $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 12$, en cirkel med centrum i $(-2,-2)$ och radie $2\sqrt{3}$. Låt $D$ beteckna området innanför denna cirkel. Då är volymen
$= \iint_D (1 - x - y - \frac{1}{4}(x^2+y^2))\, dxdy = \frac{1}{4}\iint_D (12 - (x+2)^2 - (y+2)^2)\, dxdy$.
Med variabelbytet $x + 2 = r\cos\theta$, $y + 2 = r\sin\theta$ får vi
$\frac{1}{4}\cdot 2\pi \int_0^{2\sqrt{3}} (12 - r^2)\, rdr = 18\pi$.

15. Integration ger hastigheten $\mathbf{v}(t) = (t + c_1, 2\sqrt{t} + c_2)$ (där $c_1$ och $c_2$ är konstanter), varför $\mathbf{v}(1) = (1 + c_1, 2 + c_2)$, varav $c_1 = -1$ och $c_2 = 0$. Då fås farten $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2} = \sqrt{(t+1)^2} = t + 1$ i det aktuella intervallet $[1, 3]$. Längden blir $\int_1^3 (t+1)\, dt = 6$.

16. Av symmetriskäl ger de udda termerna inget bidrag till integralen: $\iint_S (2y + xz)\, dS = 0$. Symmetriskäl ger också att
$A = \iint_S x^4\, dS = \frac{1}{3}\iint_S (x^4 + y^4 + z^4)\, dS$ och
$B = \iint_S z^2\, dS = \frac{1}{3}\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$.
$A$ beräknas med divergenssatsen: $A = \frac{1}{3}\iint_S (x^3, y^3, z^3)\cdot(x, y, z)\, dS$
$= \frac{1}{3}\iint_S (x^3, y^3, z^3)\cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, där $K$ är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Övergång till sfäriska koordinater ger
$A = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = 4\pi/5$.
Eftersom $x^2 + y^2 + z^2) = 1$ på $S$ blir $B = \frac{1}{3} \times$ arean av$(S) = 4\pi/3$.
Hela integralen blir $A + B = 4\pi(1/3 + 1/5) = 32\pi/5$.

17. Vi skall använda Stokes sats: den sökta integralen är $= \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$, där ytan $S$ har $C$ som rand. $S$ kan väljas på olika sätt. Det blir enklare om vi tar den del av ytan $z = x^2 + 1$ som ligger innanför skärningen mellan $z = x^2 + 1$ och ytan $z = 2x^2 + y^2$. På skärningen gäller $x^2 + 1 = 2x^2 + y^2$ och därmed $x^2 + y^2 = 1$. Normalen för $S$ är $\mathbf{N} = -(-2x, 0, 1) = (2x, 0, -1)$. $\nabla\times\mathbf{F} = (-x, 3y, -2z)$ vilket blir $= (-x, 3y, -2(x^2+1))$ på ytan. Integralen blir därför

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-x, 3y, -2(x^2+1))\cdot(2x, 0, -1)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2\, dxdy = 2\pi.$$