Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Flervariabel för F1.
Tentamen tisdag 1 juni 2004, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.
Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B). Den som har sju eller fler godkända lappskrivningar är också godkänd.
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.
Den som (under vårterminen 2004) blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 8$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^2 - y^2$ i punkten $(\sqrt{5}, 2, 1)$.

   b) Bestäm normalen till kurvan $x^2 - y^2 = 1$ i punkten $(\sqrt{5}, 2)$.

2. Låt $z = f(u, v)$, $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$. Visa att $xz'_x + yz'_y = 2uz'_u + 2vz'_v$.

3. a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x, y) = e^{-x+y^2}$ i punkten $(0, 1)$, i riktningen $(-1, 1)$.

   b) Finns det någon riktning $\mathbf{u}$ med $D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = 5$?

4. Lokalisera och karakterisera de kritiska punkterna till $f(x, y) = x^4+y^4-4xy$.

5. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = xy^2$ på området $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq x$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\, dxdy$, där D är området mellan kurvorna $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{1+x}$ och linjen $y = 0$.

7. Definiera sfäriska koordinater, och uttryck med dem den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ där $0 \leq y \leq x$ och $z \geq 0$.

8. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} (-y, x, z) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$ då $\mathcal{S}$ är den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv tredjekomponent.

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C (x+2y+y^2)\,dx+(2x-y)\,dy$ där kurvan C består av linjesegmenten från $(3,0)$ till $(3,3)$ och därifrån till $(0,0)$.

10. Anta att den differentierbara funktionen f uppfyller $-yf'_x + xf'_y = 0$. Visa att varje cirkel med centrum i origo är en nivåkurva till f.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Givet funktionen $f(x,y) = x^3y^2/(x^2+y^2)^2$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig i origo. Visa också att de partiella derivatorna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ existerar och beräkna dem. Undersök slutligen om f är differentierbar i origo.

12. Anta att $f(u,v)$ är harmonisk: $f''_{uu} + f''_{vv} = 0$. Visa att då är också $g(x,y) = f(-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))$, $(x,y) \neq (0,0)$, harmonisk, dvs $g''_{xx} + g''_{yy} = 0$. Vi antar att f har kontinuerliga derivator av ordning två.

13. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas då triangeln är liksidig. Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $9x^2 + 4y^2 = 36$?

14. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytan $x^2 + y^2 = 4z$ och planet $x + y + z = 1$.

15. En partikel färdas i planet så, att dess acceleration vid tiden t är $\mathbf{a}(t) = (1, t^{-1/2})$. För $t = 1$ är hastigheten $\mathbf{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln i tidsintervallet $1 \leq t \leq 3$?

16. Beräkna integralen
$$\iint_{\mathcal{S}} (x^4 + 2y + z^2 + xz)\,dS,$$
där $\mathcal{S}$ betecknar enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17. Beräkna linjeintegralen $\int_C 3yz\,dx + xz\,dy$ då C är skärningskurvan mellan cylindern $z = x^2+1$ och paraboloiden $z = 2x^2+y^2$. Sett från origo genomlöps kurvan medurs.