Modelltentan i flervariabel för F1, maj 2003.

Här behandlas bara de två uppgifter som inte hanns med vid modelltentans genomgång.

11. Uppgiften är helt analog med Ex 9, sid 728 i Adams, men leder till besvärligare räkningar. Låt oss därför starta mer allmänt med $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, så att $z = z(x, y)$ och beräkna $z''_{xx} + z''_{yy}$ (för allmänna u och v).

Enligt kedjeregeln är $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$, så $z''_{xx} = z'_u u''_{xx} + z'_v v''_{xx} + (\frac{\partial}{\partial x} z'_u) u'_x + (\frac{\partial}{\partial x} z'_v) v'_x$ (derivering av produkt).

Nu är $\frac{\partial}{\partial x} z'_u = [w = z'_u] = w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x[$ kedjeregeln för $w] = (z'_u)'_u u'_x + (z'_u)'_v v'_x = z''_{uu} u'_x + z''_{uv} v'_x$, och, helt analogt, $\frac{\partial}{\partial x} z'_v = z''_{vu} u'_x + z''_{vv} v'_x$, s aa att

$$z''_{xx} = z'_u u''_{xx} + z'_v v''_{xx} + z''_{uu}(u'_x)^2 + z''_{vv}(v'_x)^2 + 2z''_{uv} u'_x v'_x,$$

där vi använt $z''_{uv} = z''_{vu}$. På samma sätt fås

$$z''_{yy} = z'_u u''_{yy} + z'_v v''_{yy} + z''_{uu}(u'_y)^2 + z''_{vv}(v'_y)^2 + 2z''_{uv} u'_y v'_y,$$

varför

$$z''_{xx} + z''_{yy} = z'_u(u''_{xx} + u''_{yy}) + z'_v(v''_{xx} + v''_{yy}) + z''_{uu}((u'_x)^2 + (u'_y)^2) + z''_{vv}((v'_x)^2 + (v'_y)^2) + 2z''_{uv}(u'_x v'_x + u'_y v'_y).$$

Detta är den allmänna transformationsformeln. Anta nu att

$$(1) \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \qquad (2) \quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0,$$
$$(3) \quad (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2, \qquad (4) \quad u'_x v'_x + u'_y v'_y = 0.$$

Då får vi

$$z''_{xx} + z''_{yy} = ((u'_x)^2 + (u'_y)^2)(z''_{uu} + z''_{vv}).$$

Speciellt gäller att $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ om $z''_{uu} + z''_{vv} = 0$. Det aaterstår att visa (1)-(4) i vårt fall: $u = x/(x^2 + y^2)$, $v = -y/(x^2 + y^2)$. Uträkning ger

$$u'_x = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u'_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \qquad v'_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v'_y = -\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

dvs $\nabla v = (v'_x, v'_y) = (-u'_y, u'_x)$. Detta ger (4), som ju säger att u och v har ortogonala gradienter. Uppenbarligen följer även (3) härav. Vidare gäller att $v''_{xx} + v''_{yy} = -(u'_y)'_x + (u'_x)'_y = 0$, dvs (2). (1) följer på samma s ”att. Saken är klar!

15. Vi skall använda areaformeln: om C omsluter området D gäller att $A(D) = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$. Insättning av $y = tx$ i kurvans ekvation ($x^3 + y^3 = 3xy$) ger $x = 3t/(1+t^3)$, $y = 3t^2/(1+t^3)$. För att få med hela den del av kurvan som ligger i första kvadranten måste $t : 0 \to \infty$, t är ju lutningen av en linje. Nu är kurvan symmetrisk i x och y, och delas i tu av lutningen $t = 1$, dvs linjen $y = x$. Alltså blir arean

$$A(D) = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (-tx(t)(x(t))' + x(t)(tx(t))')\,dt$$
$$= \int_0^1 x^2(t)\,dt = \int_0^1 \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = 3\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2}.$$