Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i kursen 5B1108 Linjär algebra I för B, Bio, K, L, M, T och V.
Måndagen den 20 augusti 2001 kl 0800-1300.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Ordentliga motiveringar krävs.
Fordringar: Betyget 3: 16-21p; betyget 4: 22-29p; betyget 5: 30p - , inklusive bonus.

SKRIV DITT GRUPPNUMMER PÅ OMSLAGET

Lycka till!

1. Lös matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ (3p)

2. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 3y = 1 \\ 2x + 4ay + z = 4a \end{cases}$$ (3p)

för varje värde på konstanten a.

3. Skriv det komplexa talet $\dfrac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ på polär form. (3p)

4. Bestäm arean hos en triangel som bestäms av vektorn $\mathbf{u} = (1,0,1)$ och dess ortogonala projektion på vektorn $\mathbf{a} = (1,2,2)$. (3p)

5. Bestäm det komplexa talet a så att ekvationen $z^3 + (2-i)z^2 + (1-10i)z + a = 0$ får en rot $z = i$. Lös sedan ekvationen fullständigt. (4p)

6. Bestäm konstanterna a och b så att linjen $(x, y, z) = (a, 1, -1) + t(3, 1, b)$ ligger i det plan som går genom punkterna (0,1,-2), (3,0,-1) och (2,1,0). (4p)

7. En linjär avbildning $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uppfyller att $T(1,0) = (2,1)$ och $T(0,1) = (-3,-1)$. Bestäm avbildningens matris och den punktmängd som punkterna på linjen $2x + y - 3 = 0$ avbildas på. (4p)

VGV

8a. Avgör vilken typ av kägelsnitt (conic) som beskrivs av ekvationen
$2x^2 - 4xy - y^2 = 6.$ (2p)

b. Rotera koordinatsystemet så att kurvan hamnar på huvudaxelform (standard position). Ange formeln för koordinatbytet och ekvationen för kurvan i de nya koordinaterna x' och y'. (3p)

9. Låt C vara en kvadratisk matris. Om $C^T = -C$ sägs C vara antisymmetrisk.

a. Låt A vara en kvadratisk matris. Visa att $A - A^T$ är antisymmetrisk. (2p)

b. Låt C vara en antisymmetrisk $n \times n$ matris. Visa att $\det C = 0$ om n är udda. (2p)

c. Visa att till varje kvadratisk matris A finns en symmetrisk matris B och en antisymmetrisk matris C så att $A = B + C$. (2p)