Institutionen för matematik
KTH

Lösning till tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, måndagen den 12 augusti 2002

1. Subtraheras första ekvationen en gång från den andra ekvationen och två gånger från den tredje ekvationen erhålles ekvationerna

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \quad -2y + 6z = -4 \\ \quad y - 3z = 2 \end{cases}$$

Den andra ekvationen säger samma sak som den tredje och kan då elimineras. Den obekanta z kan väljas godtyckligt till talet t och då blir $y = 2 + 3t$ och $x = 1 - 5t$.

Svar. $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(-5, 3, 1)$.

2. Karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I)$ kan faktoriseras till $(4 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ och egenvärdena är alltså $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ och $\lambda = 4$. Tillhörande egenvektorer kommer att vara ortogonala mot varandra eftersom matrisen är symmetrisk.

För dessa värden på λ löser vi ekvationssystemet $AX = \lambda X$, där X är en kolonnmatris, och får egenriktningarna $(1, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$ och $(1, 0, -1)$. Vi normerar dessa och får

Svar. $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, 1\sqrt{6})$ och $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

3. De givna vektorerna är linjärt beroende precis då determinanten av nedanstående matris är lika med noll.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Uträknad blir determinantens värde $(a + 2b)(a - b)^2$. Så vi får

Svar. $a = b$ eller $a = -2b$.

4. För $n = 1$ är talet $n^3 + 3n^2 + 2n$ delbart med 6 eftersom

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6.$$

Vi visar nu att om $n^3 + 3n^2 + 2n$ är delbart med 6 så är även $(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$ delbart med 6. Vi får

$$(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+3n^2+6n+3+2n+2 = n^3+3n^2+2n+3n(n+3).$$

Talet $n(n+3)$ är jämnt eftersom precis ett av talen n och $n+3$ alltid är jämnt. Alltså är talet $3n(n+3)$ delbart med 6 och under förutsättning att talet n^3+3n^2+2n är delbart med 6 så kommer även $n^3+3n^2+2n+3n(n+3)$ att vara delbart med 6, vilket vi skulle visa.

Enligt induktionsaxiomet gäller nu det givna påståendet.

Annan metod. T ex så gäller att

$$n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2).$$

Minst en av faktorerna är delbar med två och precis en av de tre konsekutiva faktorerna är delbar med tre. Uttrycket är då delbart med både två och tre och därmed är uttrycket delbart med sex.

5. (a) Se läroboken.

   (b) Räcker att verifiera att matrisen $I+B(I-AB)^{-1}A$ fungerar som en högerinvers:

$$(I-BA)(I+B(1-AB)^{-1}A) = I-BA+B(I-AB)^{-1}A-BAB(I-AB)^{-1}A =$$

$$I-BA+B[(I-AB)^{-1}-AB(I-AB)^{-1}]A = I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A =$$

$$I-BA+BIA = I.$$

6. (a) Reella koefficienter ger att även $x_2=-2+i$ är en rot. Enligt faktorsatsen gäller att om x_1, x_2 och x_3 är rötter till ekvationen så

$$x^3-6x^2-35x-50 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

   varur erhålles att $-50=-x_1x_2x_3$. Då $x_1x_2=5$ så måste $x_3=-50/-5=10$.
   Svar. Rötterna äro $-2+i$, $-2-i$ och 10.

   (b) Om $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ är rötterna så gäller

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{17}) = x^{17}-5x^3+7.$$

   Koefficienten framför x^{16} i vänstra ledet ovan blir uträknad

$$-(x_1+x_2+\ldots+x_{17}).$$

   Då denna koefficient i högra ledet är 0 får vi
   Svar. 0.

7. (a) Låt $A=(a_{ij})$. Då gäller

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

   Alltså är $(1\ldots1)^T$ en egenvektor med egenvärdet 1.

(b) I matrisen A^T kommer radsummorna att vara lika med 1 och A^T har då, enligt uppgift (a) ovan, ett egenvärde som är lika med 1. Då gäller att $det(A^T - I) = 0$. Eftersom allmänt gäller att $det(B^T) = det(B)$ så kommer i detta fall

$$det(A - I) = det((A^T)^T - I^T) = det(A^T - I)^T = det(A^T - I) = 0.$$

Detta innebär att 1 är ett egenvärde till matrisen A.

8. Vi ser direkt att en annan bas för delrummet ges av x och $x^2 - x + x$, dvs x och x^2. Projektionen av dessa basvektorer på M blir ju x respektive x^2, så den enda beräkning som behöver göras är att beräkna projektionen av vektorn 1 på delrummet M.

Vi bestämmer för den skull talen a och b så att vektorn $1 - (ax + bx^2)$ blir vinkelrät mot både vektorn x och vektorn x^2.

$$0 = (1 - (ax + bx^2), x) = \int_0^1 (1 - (ax + bx^2))x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} - \frac{b}{4}.$$

$$0 = (1 - (ax + bx^2), x^2) = \int_0^1 (1 - (ax + bx^2))x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{4} - \frac{b}{5}.$$

Detta ger att $a = 4$ och $b = -10/3$. Vi får då att projektionen $ax + bx^2$ av 1 på delrummet M blir $4x - 10/3 \cdot x^2$. Så svaret ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -10/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Linjen på parameterform är

$$(x, y, z) = (-3, 3, 2) + t(1, 1, -7).$$

Den givna mittpunktens koordinater blir

$$\frac{1}{2}[(1, 1, 2) + (3, 1, 4)] = (2, 1, 3).$$

En vektor v mellan denna mittpunkt och en punkt på linjen är parallell med planet. Väljer vi punkten $(-3, 3, 2)$ på linjen blir $v = (5, -2, 1)$. En normal till planet ges då av kryssprodukten av linjens riktningsvektor och denna vektor, dvs

$$(1, 1, -7) \times (5, -2, 1) = (-13, -36, -7).$$

Formeln för planets ekvation ger nu

Svar. $-13(x - (-3)) - 36(y - 3) - 7(z - 2) = 0.$

10. (a) Vi skall verifiera att (p, q) har följande fyra egensakper: (i) $(p, q) = (q, p)$, (ii) $(p, \lambda q) = \lambda(p, q)$, (iii) $(p, q + r) = (p, q) + (p, r)$, (iv) $(p, p) \geq 0$ för alla p och med likhet precis då $p = 0$.

Räknelagarna vid integralkalkyl ger att

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx + ap(1)q(1) = \int_{-1}^{1} q(x)p(x)\, dx + aq(1)p(1) = (q, p)$$

dvs (i) gäller.

$$(p, \lambda q) = \int_{-1}^{1} p(x)\lambda q(x)\, dx + ap(1)\lambda q(1) = \lambda \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx + \lambda ap(1)q(1) = \lambda(p, q)$$

dvs (ii) gäller. (iii) visas på samma sätt. Nu till (iv).

$$(p, p) = \int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx + ap(1)^2$$

Då $\int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx \geq 0$ och $p(1)^2 \geq 0$ så är $(p, p) \geq 0$ om $a \geq 0$. För att (p, p) skall vara lika med 0 måste både $ap(1)^2$ och $\int_{-1}^{1} p(x)^2\, dx$ vara lika med 0. Detta inträffar endast då p(x) är nollploynomet, dvs $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots$.

(b)

$$0 = (x, x^2) = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx + a1 \cdot 1^2 = \int_{-1}^{1} x^3\, dx + a = \frac{1}{2} + a.$$

Svar. $a = -\frac{1}{2}$.