Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, måndagen den 12 augusti 2002 klockan 8.00-13.00

Examinatorer: Tomas Ekholm och Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2001.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar. Skriv snyggt och prydligt.

PROBLEM: (Uppgifternas ordning är oberoende av deras svårighetsgrad)

1. (3p) Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & y & + & 8z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 8 \end{array}\right.$$

2. (3p) Bestäm en ortonormerad bas av egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (3p) För vilka värden på konstanterna a och b är de tre vektorerna (a, b, b), (b, a, b) och (b, b, a) linjärt beroende.

4. (3p) Visa med hjälp av induktion eller annan metod att uttrycket $n^3 + 3n^2 + 2n$ är delbart med 6 för alla positiva heltal n.

V.G.V.

5. (a) (1p) Definiera vad som menas med att en $n \times n$ matris A är inverterbar.
   (b) (2p) Låt A och B vara två $n \times n$ matriser sådana att $I - AB$ är inverterbar. Visa att då är också $I - BA$ inverterbar med inversen $I + B(I - AB)^{-1}A$.

6. (a) (3p) Lös ekvationen $x^3 - 6x^2 - 35x - 50 = 0$ givet att $x_1 = -2 - i$ är en rot till ekvationen.
   (b) (1p) Bestäm summan av rötterna till ekvationen $x^{17} - 5x^3 + 7 = 0$.

7. Låt A vara en $n \times n$ matris.
   (a) (2p) Visa att om varje radsumma i A är 1 så är 1 ett egenvärde för A. Ett tips är att försöka finna en egenvektor.
   (b) (2p) Visa att om varje kolonnsumma i A är 1 så är 1 ett egenvärde för A.

8. (4p) Låt vektorrummet $P_n = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$ vara försedd med skalärprodukten

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

Låt $p(x) = x$ och $q(x) = x^2 - x$ bilda en bas för delrummet M av P_2. Låt F vara den linjära avbildningen projektion på M. Bestäm matrisavbildningen i basen $1, x, x^2$.

9. (4p) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 5 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

och går genom mittpunkten på sträckan mellan punkterna $(1, 1, 2)$ och $(3, 1, 4)$.

10. (a) (2p) Låt $P_n = \{p : p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$. Visa att för $a > 0$ och $p, q \in P_4$ definierar

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\, dx + ap(1)q(1)$$

en skalärprodukt (inre produkt) i P_4.
   (b) (2p) Bestäm a så att polynomen $p(x) = x$ och $q(x) = x^2$ blir ortogonala i P_4.