Institutionen för matematik
KTH

Lösning till tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, onsdagen den 16 oktober 2002

1. Låt t ex $\mathbf{e_3} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Då

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

så är $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ och $\mathbf{e_3}$ linjärt oberoende. Tre linjärt oberoende vektorer i R^3 utgör alltid en bas.

Svar. Till exempel $\mathbf{e_3} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

2. Då antalet ekvationer är lika med antalet obekanta så finns det precis en lösning till systemet om och endast om koefficientmatrisens determinant är skild från noll. Då

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5+a & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7+a & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 8a$$

så precis en lösning när $a \neq 0$. När $a = 0$ blir systemet, med samma kalkyl som ovan, ekvivalent med systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & & & = & 5 \\ 4x & + & 7y & & & = & 5 \end{array} \right.$$

Detta system har oändligt många lösningar.

Svar. Om $a \neq 0$ precis en lösning, om $a = 0$ oändligt många lösningar.

3. Substituera x med bi där b är ett reellt tal. Vi får

$$0 = b^4 - 4b^3 i - 6b^2 + 4bi + 5 = (b^4 - 6b^2 + 5) + i(-4b^3 + 4b).$$

Både realdelen och imaginärdelen ovan måste vara noll. Detta ger oss att

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} b^4 & - & 6b^2 & + & 5 & = & 0 \\ 4b^3 & - & 4b & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Vi sluter att $b = \pm 1$. Då $x = \pm i$ är rötter så måste polynomet i fråga, enligt faktorsatsen, vara jämnt delbart med $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. Polynomdivision ger då att

$$(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5) = 0.$$

Då $x = -2 + i$ och $x = -2 - i$ är nollställen till $x^2 + 4x + 5$ så

Svar. Rötterna äro $x = \pm i$, $x = -2 + i$ och $x = -2 - i$.

4. Likheten är sann då $n = 1$, ty $VL_1 = 1^2 = 1$ och $HL_1 = \frac{1}{3}1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1) = 1$. Vi visar nu att om $VL_n = HL_n$ så gäller att $VL_{n+1} = HL_{n+1}$.

$$VL_{n+1} = VL_n + (2n + 1)^2 =$$

$$\{\text{under förutsättning att } VL_n = HL_n\} =$$

$$HL_n + (2n + 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1) + (2n + 1)^2 = \frac{1}{3}(2n + 1)(2n^2 + 5n + 3).$$

Då

$$HL_{n+1} = \frac{1}{3}(n + 1)(2(n + 1) - 1)(2(n + 1) + 1) = \frac{1}{3}(2n + 1)(2n^2 + 5n + 3)$$

så följer nu, enligt induktionsaxiomet, att likheten gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$.

5.

$$0 = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - 16(1-\lambda) - 9(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 25].$$

Detta ger att $\lambda = 1$ eller $(1 - \lambda) = \pm 5$ dvs $\lambda = 6$ eller $\lambda = -4$.

För dessa värden på talen λ löser vi ekvationssytemet

$$\begin{cases} (1-\lambda)x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

Vi får för $\lambda = 1$ lösningarna $(x, y, z) = t(-4, 3, 0)$, $\lambda = 6$ lösningarna $(x, y, z) = t(3, 4, 5)$ och för $\lambda = -4$ lösningarna $(x, y, z) = t(-3, -4, 5)$.

6. En linjes riktningsvektor är bestämd så när som på parallellitet, så om de bägge representationerna av en linje, beskriver en och samma linje måste

$$(1, -1, 2) = t(b, -b, 1)$$

för något tal t. Enda möjligheten är att $t = 2$ och då måste $b = \frac{1}{2}$. Med detta värde på b så är riktningsvektorerna parallella.

Punkten (1,2,0) ligger på linjen. Så vi undersöker om det finns ett tal a så att

$$(1, 2, 0) = (a, a, 1) + t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$$

Detta ger att

$$1 = a + \frac{t}{2}, \quad 2 = a - \frac{t}{2}, \quad 0 = 1 + t.$$

Vi finner att det finns ett a som duger, $a = \frac{3}{2}$ (med $t = -1$).

Svar. Ja.

7.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Så vi får

Svar.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 6 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Använder formeln

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A^T A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{A^T b}$$

där $\mathbf{A}$ är givna systemets koefficientmatris, $\mathbf{b} = (6 \quad -4 \quad 2 \quad 4)^T$ och $\mathbf{x} = (k \quad l \quad m)^T$. Då

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

så blir

$$\mathbf{A^T A} = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Invertering av denna matris på sedvanligt sätt ger insatt i formeln ovan att $(k, l, m) = (3, -3, -1)$.

Svar. $y = 3x^2 - 3x - 1$.

9. (a) Vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tillhör det sökta ortogonala komplementet om och endast om $\mathbf{x}$ är ortogonal mot varje kolonn i givna matrisen. Detta innebär att skalära produkten av $\mathbf{x}$ med varje kolonn är lika med noll. Vi får följande villkor på $\mathbf{x}$:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-7, 4, 0, 1) + s(4, -2, 1, 0).$$

Vektorerna $(-7, 4, 0, 1)$ och $(4, -2, 1, 0)$ är linjärt oberoende och spänner upp det ortogonala komplementet, så

Svar. $(-7, 4, 0, 1)$ och $(4, -2, 1, 0)$.

(b) Allmänt gäller för ett delrum U till ett vektorrum V att

$$dim(U) + dim(U^{\perp}) = dim(V).$$

Eftersom ortogonala komplementet till kolonnrummet har dimension 2 så har kolonnrummet dimension $4-2$, dvs 2. Vi använder Gram-Schmidts metod för att komplettera vektorn $\mathbf{e_1} = (1, 1, -2, 3)$ med en vektor $\mathbf{e_2}$ ortogonal mot $\mathbf{e_1}$. Låt $\mathbf{v} = (1, 0, -4, 7)$. Vi får

$$\mathbf{e_2} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{e_1}||^2}\mathbf{e_1} =$$

$$(1, 0, -4, 7) - \frac{30}{15}(1, 1, -2, 3) = (-1, -2, 0, 1).$$

Svar. $\mathbf{e_1} = (1, 1, -2, 3)$ och $\mathbf{e_2} = (-1, -2, 0, 1)$.

10. Räknelagarna för skalär produkt och kryssprodukt ger att

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0 \quad (2)$$

Ekvation (2) ger att $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ och då ger (1) att

$$0 = ||\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})|| = ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b} - \mathbf{c}|| \cdot |\sin(\frac{\pi}{2})|$$

Då $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ och $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ så är enda möjligheten att $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vilket skulle visas.