Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, onsdagen den 16 oktober 2002 klockan 8.00-13.00

Examinatorer: Carel Faber och Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2002.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Komplettera $\mathbf{e}_1 = (1, 1, -3)$ och $\mathbf{e}_2 = (2, -2, 6)$ med en vektor $\mathbf{e}_3$ sådan att $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ blir en bas för $\mathbf{R}^3$.

2. (3p) Avgör för vilka reella värden på parametern a följande ekvationssystem

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & (5+a)y & + & 2z & = & a+4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right.$$

har precis en lösning, oändligt många lösningar eller saknar lösning.

3. (3p) Nedanstående ekvation har en rot som är imaginär (dvs som kan skrivas på formen $b\,i$ med b reellt). Bestäm samtliga rötter till ekvationen.

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0.$$

4. (3p) Visa med hjälp av induktion att

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}\,n(2n-1)(2n+1)$$

för alla positiva heltal n.

V.G.V.

5. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (4p) Undersök om det finns konstanter a och b så att

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x &= a+bs \\ y &= a-bs \\ z &= 1+s \end{cases}$$

beskriver samma linje i $\mathbf{R}^3$.

7. (4p) Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en linjär avbildning. Det är givet att

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm standardmatrisen för T.

8. (4p) Ange den parabel $y = kx^2 + \ell x + m$ som i minsta kvadratmening ansluter så nära som möjligt till punkterna $(-1, 6)$, $(0, -4)$, $(1, 2)$ och $2, 4)$. Dvs bestäm en minsta kvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} k - \ell + m = 6 \\ m = -4 \\ k + \ell + m = 2 \\ 4k + 2\ell + m = 4. \end{cases}$$

9. (4p) Låt A vara matrisen

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -2 & -4 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) (2p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet till A:s kolonnrum.

(b) (2p) Komplettera $(1, 1, -2, 3)$ till en ortogonal bas för A:s kolonnrum.

10. (4p) Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ vara tre vektorer i $\mathbf{R}^3$, med $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Visa att om det gäller att $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ så är $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.