Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, tisdagen den 7 januari 2003 klockan 14.00-19.00

1.
$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda),$$

egenvärdena är alltså $2, 1, -1$. Genom att sätta in dessa värden i matrisen $A - \lambda I$ och beräkna nollrummet får vi de respektiva egenvektorerna: $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ och deras nollskilda multipler.

2. Skriv $z^2 = x$, då är $z^4 - 3z^2 - 10 = x^2 - 3x - 10$ vilket faktoriserar som $(x-5)(x+2)$. Alltså $z^4 - 3z^2 - 10 = (z^2-5)(z^2+2)$ och faktoriseringen i förstagradsfaktorer blir $z^4 - 3z^2 - 10 = (z+\sqrt{5})(z-\sqrt{5})(z+\mathrm{i}\sqrt{2})(z-\mathrm{i}\sqrt{2})$.

3. Vi ger ett induktionsbevis. Startsteget, $n = 1$: $3^2 - 1 = 8$ är jämnt delbart med 8. Induktionssteget: antag att påståendet är sant för $n = k$: då är $3^{2k} - 1 = 8m$ för något heltal m. Vi ska då visa påståendet för $n = k+1$. Vi har $3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 9 \cdot 3^{2k} - 1 = 8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1 = 8(3^{2k} + m)$ enligt antagendet, vilket visar påståendet för $n = k+1$. Med hjälp av induktion har vi visat påståendet för alla positiva heltal n.

4. Systemet är ekvivalent med

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ (a+2)y - 18z = 3 \\ y + (a-9)z = b-3. \end{cases}$$

Determinanten är alltså $(a+2)(a-9)+18 = a^2 - 7a = a(a-7)$. Om $a \neq 0$ och $a \neq 7$ finns det precis en lösning för varje b. Om $a = 0$ har systemet inga lösningar när $b \neq 9/2$ och oändligt många lösningar när $b = 9/2$. Om $a = 7$ har systemet inga lösningar när $b \neq 10/3$ och oändligt många lösningar när $b = 10/3$.

5. (a) Vektorerna $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ är linjärt beroende om och endast om det finns en icke-trivial linjär kombination som är lika med nollvektorn:

$$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{0}, \qquad (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0).$$

(b) Antag att det finns ett sådant t. Då är även vektorerna $(1, 2, 1)$, $(2, 1, t)$ och $(1, t, 1)$ (vilka fås genom att ta de första tre komponenterna av varje vektor) linjärt beroende. Då är den motsvarande 3×3 determinanten lika med noll, vilket ger $(t-2)^2 = 0$, alltså $t = 2$. Dvs, om vektorerna är linjärt beroende, då är $t = 2$. Återstår att avgöra om $t = 2$ ger tre linjärt beroende vektorer. Det är lätt att se att så är inte fallet. Svar: nej, det går inte.

6. Låt (x', y') vara koordinaterna i det nya systemet. Då gäller $(x, y)^T = A(x', y')^T$ där matrisen A bestäms av $A(1, 0)^T = (\cos \pi/4, \sin \pi/4)^T = 1/2(\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$ och $A(0, 1)^T = (\cos 3\pi/4, \sin 3\pi/4)^T = 1/2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$. Vi får

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Alltså $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x' - y')$ och $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y')$, vilket ger $x + y = \sqrt{2}x'$ och $x - y = -\sqrt{2}y'$. Eftersom $(x + y)(x^2 - y^2) = (x + y)^2(x - y)$ blir kurvans ekvation i det nya systemet $-2\sqrt{2}x'^2y' = 1$.

7. Låt $U = \langle t^2 \rangle^\perp$ vara det ortogonala komplementet. Eftersom P_2 har dimension 3 och $\langle t^2 \rangle$ har dimension 1, följer att U har dimension 2. Det är lätt att se att $t \in U$, eftersom $\int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$. Polynomet $t^2 + a$ är ett element av U om och endast om

$$0 = \int_{-1}^{1} (t^4 + at^2)\, dt = [t^5/5 + at^3/3]_{-1}^{1} = 2(1/5 + a/3),$$

vilket ger $a = -3/5$. Svar: ortogonala komplementet spänns av t och $t^2 - 3/5$.

8. (a) Ekvationssystemet som bildas av $1 + s = t$, $5s = 1 - t$ och $2 + s = 1 + t$ ska lösas. Vi har $5s = 1 - t = 1 - (1 + s) = -s$, alltså $s = 0$, då $t = 1$, och det är den entydiga lösningen. Linjerna skär varandra i punkten $(1, 0, 2)$.

(b) Cosinus för vinklen beräknas med hjälp av skalärprodukten av linjernas riktningsvektorer:

$$\cos\theta = \frac{(1, 5, 1) \cdot (1, -1, 1)}{||(1, 5, 1)||\,||(1, -1, 1)||} = \frac{1 - 5 + 1}{\sqrt{27}\,\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{81}} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

9. Sådana x, y, z och w finns om och endast om den kvadratiska formen $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - (2xy - 2xz - 2xw - 2yz - 2yw + 2zw)$ är inte positiv definit, vilket gäller om och endast om den motsvarande symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

har ett icke-positivt egenvärde. En beräkning visar att matrisens karakteristiska polynom är $(\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$. Alltså är -2 ett icke-positivt egenvärde, och det finns sådana x, y, z och w. (T.ex. kan man ta $(x, y, z, w) = (1, 1, -1, -1)$, en egenvektor med egenvärde -2. Den kvadratiska formen ger då värdet $-2||(1, 1, -1, -1)||^2 = -8$.

10. (a) Vi kan t.ex. betrakta de motsvarande avbildningarna från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$. Då motsvarar B avbildningen T_B och AB avbildningen $T_A \circ T_B$. Rangen av B är dimensionen av bilden av T_B och rangen av AB är dimensionen av bilden av $T_A \circ T_B$. Eftersom $\det(A) \neq 0$ är T_A inverterbar och skickar en bas av bilden av T_B till en bas av bilden av $T_A \circ T_B$. Alltså har matriserna B och AB samma rang.

    (b) Det går bra med 2×2 matriser, t.ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$