Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, tisdagen den 7 januari 2003 klockan 14.00-19.00

Examinatorer: Carel Faber och Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2002.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (3p) Faktorisera $z^4 - 3z^2 - 10$ i förstagradsfaktorer.

3. (3p) Visa med hjälp av induktion eller annan metod att uttrycket $3^{2n} - 1$ är jämnt delbart med 8 för alla positiva heltal n.

4. (3p) Bestäm, för samtliga värden på talen a och b, antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + ay - 21z = 2 \\ 3x + 7y + az = b. \end{cases}$$

V.G.V.

5. (a) (1p) Definiera vad som menas med att en mängd vektorer är linjärt beroende.
   (b) (2p) Undersök om det går att bestämma talet t så att vektorerna $(1, 2, 1, t)$, $(2, 1, t, 2)$ och $(1, t, 1, 1)$ blir linjärt beroende.

6. (4p) Kurvan $(x + y)(x^2 - y^2) = 1$ är given i ett ON-system i planet. Vilken blir kurvans ekvation om koordinatsystemet vrids vinkeln $+\pi/4$?

7. (4p) Betrakta rummet P_2 av polynom av grad högst 2 med den inre produkten

$$< f(t) \mid g(t) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

   Bestäm ortogonala komplementet till polynomet t^2 i detta rum.

8. (a) (2p) Visa att de bägge linjerna

$$\ell_1 : (x, y, z) = (1, 0, 2) + s(1, 5, 1)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, -1, 1)$$

   skär varandra.

   (b) (2p) Bestäm cosinus för vinkeln mellan dessa linjer.

9. (4p) Undersök om det finns x, y, z och w sådana att $(x, y, z, w) \neq 0$ och

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 2xy - 2xz - 2xw - 2yz - 2yw + 2zw.$$

10. Låt A och B vara $n \times n$-matriser.
   (a) (2p) Visa att om determinanten för matrisen A inte är lika med noll så har matriserna B och AB samma rang.
   (b) (2p) Ge exempel på två matriser A och B sådana att matriserna AB och BA har olika rang.