Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, måndagen den 18 augusti 2003.

1. $\text{Arg}(1+i) = \pi/4$, $\text{Arg}(1-i) = -\pi/4$ och $\text{Arg}(1+i\sqrt{3}) = \pi/3$ medför att argumentet för det sökta talet z är
$$45\pi/4 - 37\pi/4 - 41\pi/3 = -6\pi + \pi/3$$
så z har argumentet $\pi/3$. Beloppen av $1+i$, $1-i$ och $1+i\sqrt{3}$ är 2, 2 resp 4 så beloppet av z blir
$$2^{45}2^{37}/4^{41} = 1.$$
Så

   Svar $1/2 + i\sqrt{3}/2$

2. Den binomiska ekvationen $x^6+1=0$ har de sex rötterna $\pm(\pm\sqrt{3}+i)/2$ och $\pm i$. Kombinerar vi konjugerade rötter får vi faktoriseringen

   Svar $x^6+1 = (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

3. Multiplicerar vi givna ekvationens båda led med matrisen $\mathbf{A}$:s invers två gånger till vänster får vi att $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Sedvanlig beräkning av matrisinvers ger att
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Efter en matrismultiplikation får vi då

   Svar
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 & -2 \\ 7 & 4 & -9 & -3 \\ -6 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Beteckna givna matrisen med A. Karakterstiska ekvationen $det(A-\lambda I) = 0$ har trippelroten $\lambda = 2$. Enda egenvärdet är alltså $\lambda = 2$. Egenvektorer hörande till detta egenvärde ges av lösningarna till ekvationssystemet $(A-2I)X = 0$ där X betecknar en 3×1-matris. Koefficientmatrisen till detta system har rangen ett och lösningarna består av de $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ sådana att $x_1 + 2x_2 - x_1 = 0$. Lösningarna till denna ekvation ger

   Svar Egenvärden $\lambda = 2$ med tillhörande egenrum $span\{(1 \quad 0 \quad 1)^T, (1 \quad -1 \quad -1)^T\}$.

5. Vi observerar att $f(t)$ och $g(t)$ är ortogonala mot varandra. Låt L beteckna det delrum till P_2 som spänns upp av $f(t)$ och $g(t)$. Polynomet $t^2 - proj_L(t^2)$ är då ortogonalt mot både $f(t)$ och $g(t)$. Då
$$proj_L(t^2) = \frac{< t^2 \mid f(t) >}{< f(t) \mid f(t) >} f(t) + \frac{< t^2 \mid g(t) >}{< g(t) \mid g(t) >} g(t) = \frac{1}{3} + \frac{1/6}{1/3}(2t-1).$$

Således

Svar $t^2 - t + \frac{1}{6}$.

6. Påståendet är sant för $n = 1$ eftersom $4^2 - 1 = 15$. Vi visar nu att om $4^{2n} - 1$ är delbart med 15 så kommer $4^{2(n+1)} - 1$ att vara delbart med 15. Vi finner nämligen att

$$4^{2(n+1)} - 1 = 16 \cdot 4^{2n} - 1 = 15 \cdot 4^{2n} + 4^{2n} - 1$$

som ju är delbart med 15 om $4^{2n} - 1$ är delbart med 15. Enligt induktionsaxiomet är nu $4^{2n} - 1$ delbart med 15 för alla naturliga tal n.

7. Villkoren $A(x) = b$ och $A(y) = b$ ger att $A(x - y) = 0$. Således måste c tillhöra A:s nollrum. En matrismultiplikation ger att

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Således finns inga sådana x, y och b.

8. Man finner efter elementära radoperationer i matrisen att matrisens rang är två och att raderna $e_1 = (1, 0, 3, 7)$ och $e_2 = (0, 1, -1, -2)$ utgör en bas för radrummet. Med samma elementära radoperationer finner man en bas för nollrummet, dvs en bas för lösningsrummet till det homogena ekvationssystemet $AX = O$. En bas för nollrummet är t ex $e_3 = (-3, 1, 1, 0)$ och $e_4 = (-7, 2, 0, 1)$. Vi söker nu de entydigt bestämda talen λ_1, λ_2, λ_3 och λ_4 sådana att

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4.$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Detta system har lösningen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ och $\lambda_4 = 1$. Vi låter nu med nödvändighet $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ och $b = \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$. Vi har

Svar $a = (1, 2, 1, 3)$ och $b = (-1, 0, -2, 1)$.

9. Den symmetriska matris A_1 som hör till den kvadratiska formen Q_1, dvs A_1 satisfierar

$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) A_1 (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$$

är matrisen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den har två positiva egenvärden $\lambda = 1$ (dubbelt nollställe till karaktersitiska polynomet) och ett negativt egenvärde $\lambda = -1$. Huvudaxelformen för Q_1 blir då, i det nya koordinatsystem som ges av egenvektorerna till matrisen A_1,

$$Q_1 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

I det 2-dimensionella delrummet L_1 till R^3 givet av lösningarna till ekvationen $y_3 = 0$ antar Q_1 enbart ickenegativa värden.

På samma sätt behandlas den kvadratiska formen Q_2 och man finner att motsvarande matris A_2 har två positiva egenvärden och ett negativt egenvärde. Till Q_2 finns alltså också ett 2-dimensionellt delrum L_2 till R^3 där Q_2 enbart antar ickenegativa värden.

Då L_1 och L_2 båda är 2-dimensionella delrum till det 3-dimensionella delrummet R^3 så är deras snitt, delrummet L, ett rum av dimension minst ett. I L antar både Q_1 och Q_2 ickenegativa värden.

10. Linjen ℓ_1 är parallell med planet eftersom dess riktningsvektor $(1, 1, 1)$ är vinkelrät mot planets normalvektor $(1, 1, -2)$. Projektionen ℓ_1' av ℓ_1 på planet har alltså riktningsvektorn $(1, 1, 1)$. Låt ℓ_2' beteckna ℓ_2:s projektion på planet ifråga. Den projicerade linjen ℓ_2' är parallell med ℓ_1' precis då ℓ_2 ligger i det plan som spänns upp av ℓ_1' och planets normal $(1, 1, -2)$. Ekvationen

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, -2) = (1, 2, a)$$

saknar uppenbarligen lösningar för varje värde på talet a och därmed är frågan avgjord. Projektionen av ℓ_1 blir aldrig parallell med projektionen av ℓ_2 och de projicerade linjerna kommer att skära varandra, för varje värde på talet a, eftersom ickeparallella linjer alltid skär varandra.