Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, måndagen den 18 augusti 2003 klockan 08.00-13.00

Examinatorer: Carel Faber och Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2002.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm argument och belopp för nedanstående komplexa tal samt skriv talet på formen $a + ib$ där a och b är reella tal:
$$\frac{(1+i)^{45}(1-i)^{37}}{(1+i\sqrt{3})^{41}}.$$

2. (3p) Faktorisera nedanstående polynom i reella faktorer av så låg grad som möjligt:
$$x^6 + 1.$$

3. (3p) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Sök en matris $\mathbf{X}$ sådan att
$$\mathbf{A}^2\mathbf{X} = \mathbf{AB}.$$

4. (3p) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (3p) Betrakta rummet P_2 av polynom av grad högst två med den inre produkten
$$< f(t) \mid g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
Bestäm ett polynom i detta rum som är ortogonalt mot de bägge polynomen $f(t) = 1$ och $g(t) = 2t - 1$.

V.G.V.

6. (4p) Visa att
$$4^{2n} - 1$$
är delbart med 15 för alla naturliga tal $n \geq 1$.

7. (4p) Betrakta en linjär avbildning A från R^4 till R^4 som relativt standardbasen beskrivs av matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Undersök om det finns vektorer x, y och b i R^4 sådana att
$$\begin{aligned} A(x) &= b \\ A(y) &= b \\ x - y &= c. \end{aligned}$$
där $c = (1, 2, 1, 1)$.

8. (4p) Låt A vara matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
och låt x i R^4 vara vektorn $(0, 2, -1, 4)$. Bestäm en vektor a i A:s radrum och en vektor b i A:s nollrum sådana att $x = a + b$.

9. (4p) Undersök om det finns något 1-dimensionellt delrum till R^3 i vilket de bägge kvadratiska formerna
$$Q_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_3^2$$
$$Q_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$
bara antar ickenegativa värden.

10. (4p) Betrakta det plan L i R^3 som består av de (x_1, x_2, x_3) som satisfierar ekvationen
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$
Låt a vara ett reellt tal. Betrakta de (ortogonala) projektionerna av de bägge linjerna
$$\ell_1 = (1, 2, 1) + t(1, 1, 1)$$
$$\ell_2 = (0, 0, 1) + t(1, 2, a)$$
på planet L. Undersök om det går att bestämma talet a så att de projicerade linjerna inte skär varandra.