Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i 5B1109, Linjär Algebra II för D1 och F1 fredagen den 24 oktober 2003 kl 14.00–19.00

Examinatorer: Tomas Ekholm och Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2003.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar. Skriv läsligt.

PROBLEM: (Uppgifternas ordning är oberoende av deras svårighetsgrad)

1. (3p) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Addera } -1 \text{ av} \\ \text{den första raden} \\ \text{till den andra}\end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Addera } -2 \text{ av} \\ \text{den första raden} \\ \text{till den tredje}\end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Addera } 4 \text{ av} \\ \text{den andra raden} \\ \text{till den tredje}\end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Addera } -2 \text{ av} \\ \text{den andra raden} \\ \text{till den första}\end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Alltså

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slutligen får vi

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

2. (3p) Visa formeln

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6},$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning: Vi nyttjar induktion.

(a) Fallet $n = 1$ ger VL $= 12$ och HL $= 12$.

(b) Antag att

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6},$$

för ett fixt värde på $n \geq 1$. Vi vill visa att formeln stämmer för nästkommande heltal, d.v.s. att

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+5) + (n+2)(n+6) = \frac{(n+1)(2n+9)(n+8)}{6}.$$

Studera vänsterledet:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+5) + (n+2)(n+6) \\ &= \frac{n(2n+7)(n+7)}{6} + (n+2)(n+6) \\ &= \frac{2n^3 + 21n^2 + 49n}{6} + \frac{6n^2 + 48n + 72}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 27n^2 + 97n + 72}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+9)(n+8)}{6}. \end{aligned}$$

Påståendet följer nu av induktion.

$\square$

3. (3p) Punkten $(-2, -1, 1)$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ligger båda i ett plan. Bestäm planets ekvation.

Lösning: Vi bestämmer en normalvektor till planet. En vektor i planet är linjens riktningsvektor $\mathbf{u} = \big(1,\ -2,\ 1\big)$ och en annan är vektorn $\mathbf{v}$ mellan punkterna $\big(3,\ -2,\ 0\big)$ och $\big(-2,\ -1,\ 1\big)$. Vektorn $\mathbf{v}$ blir $\big(5,\ -1,\ -1\big)$ och vektorprodukten av u och v blir

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \big(3,\ 6,\ 9\big).$$

Vi har att planets ekvation är $x + 2y + 3z + D = 0$. Vi vet att punkten $\big(-2,\ -1,\ 1\big)$ ligger i planet och därmed uppfyller planets ekvation. Vi har därmed att $D = 1$ och planets ekvation givet som $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

$\square$

4. (3p) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(1,2) = (3,1)$ och $T(-2,1) = (1,1)$. Bestäm $T(3,5)$.

Lösning: Först finner vi konstanter s och t sådana att $\big(3,\ 5\big) = s\,\big(1,\ 2\big) + t\,\big(-2,\ 1\big)$. Vi finner att $s = \frac{13}{5}$ och $t = -\frac{1}{5}$. Vi har nu att

$$\begin{aligned} T(1,2) &= T\left(\frac{13}{5}\big(1,\ 2\big) - \frac{1}{5}\big(-2,\ 1\big)\right) \\ &= \frac{13}{5}T(1,2) - \frac{1}{5}T(-2,1) = \frac{13}{5}(3,1) - \frac{1}{5}(1,1) = \frac{1}{5}(38,12). \end{aligned}$$

$\square$

5. (3p) Lös det överbestämda ekvationssystemet i minsta kvadratmening

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = -9 \\ x_1 - 2x_2 = -12 \end{cases}.$$

Lösning: Ekvationssystemet kan skrivas på formen $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 16 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet $\mathbf{A}^T\mathbf{AX} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}$. Vi har att

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

och att

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T B = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -46 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -245 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

6. Definiera i $\mathbb{R}^3$ inre produkten (skalärprodukten)

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3.$$

(a) (2p) För vilka värden på det reella talet a är vektorerna $\mathbf{w}_1 = (a,\ 1,\ a)$ och $\mathbf{w}_2 = (a,\ 1,\ 1)$ ortogonala.

(b) (2p) Låt nu $a = 2$. Bestäm en nollskild vektor $\mathbf{w}_3$ ortogonal mot $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$.

Lösning:

(a) Vektorerna är ortogonala om $< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 > = 0$. Vi får

$$< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 > = a^2 + 2 + 3a = (a+2)(a+1) = 0.$$

Vektorerna $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ är ortogonala om och endast om $a = -1$ eller $a = -2$.

(b) Låt nu $a = 2$ och ansätt $\mathbf{w}_3 = (x,\ y,\ z)$ sådan att $< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 > = 0$ och $< \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 > = 0$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Addera } -1 \text{ av} \\ \text{den andra raden} \\ \text{till den första}\end{array}\right] \begin{cases} 3z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{Ansätt } x = t\right] \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

En nollskild vektor är $\mathbf{w}_3 = (1,\ -1,\ 0)$.

□

7. (4p) Lös ekvationen $z^6 - 2iz^3 - 4 = 0$. Svaret får anges i polär form.

Lösning: Ansätt $z^3 = w$, vi får ekvationen

$$w^2 - 2iw - 4 = 0.$$

Vi nyttjar kvadratkomplettering

$$w^2 - 2iw - 4 = (w - i)^2 - 3 = 0.$$

Detta ger att $w - i = \pm\sqrt{3}$ och att $w_1 = \sqrt{3} + i$ och $w_2 = -\sqrt{3} + i$. Det återstår att lösa ekvationerna $z^3 = w_1$ och $z^3 = w_2$. Vi studerar ekvationen $z^3 = w_1$ i polär form och för $\theta = \arg z$ får vi

$$|z|^3 e^{i3\theta} = 2e^{\frac{i\pi}{6}}.$$

Lösningen till denna ekvation är

$$z_k = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(\pi + 12\pi k)}{18}}, \quad \text{för } k = 0, 1, 2.$$

Ekvationen $z^3 = w_2$ i polär form ger

$$|z|^3 e^{i3\theta} = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

vilket leder till lösningarna

$$z_k = 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i(5\pi + 12\pi k)}{18}}, \quad \text{för } k = 3, 4, 5.$$

Lösningarna till ekvationen $z^6 - 2iz^3 - 4 = 0$ är z_k för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

□

8. (a) (2p) Låt V vara ett vektorrum. Definiera vad som menas med att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i V är linjärt oberoende.

   (b) (2p) Visa att vektorerna $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 1 + 3x + x^2$ och $r(x) = 3 + x - x^2$ är linjärt beroende i $\mathbb{P}_2 = \{q : q \text{ är ett polynom av grad högst } 2\}$.

Lösning:

(a) Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om ekvationen $s_1\mathbf{v}_1 + \ldots + s_n\mathbf{v}_n = 0$ endast har lösningen $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$, där $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$.

(b) Vektorerna p, q och r är linjärt beroende om vi kan finna s_1, s_2 och s_3 inte alla noll sådana att $s_1 p + s_2 q + s_3 r = 0$. Ekvationen får utseendet

$$s_1 + s_1 x + s_2 + 3s_2 x + s_2 x^2 + 3s_3 + s_3 x - s_3 x^2 = 0.$$

Alltså har vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ekvationssytemet har lösningar skilda från noll om och endast om

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Vilket är fallet. Alltså är vektorerna linjärt beroende.

$\square$

9. (4p) Låt $K(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$, för $x = \big(x_1,\ x_2,\ x_3\big)$. Undersök om det finns ett $\mathbf{x} \neq 0$ sådant att $K(\mathbf{x}) \leq 0$.

Lösning: Vi måste undersöka om den kvadratiska formen är positivt definit vilket är detsamma som att undersöka om alla egenvärden till den associerade symmetriska matrisen till K är > 0. Den associerade matrisen har utseendet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till A löses enligt ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)^2 + 32 - 8(5-\lambda) - 16(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) - 40 + 24\lambda \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 50 - 40 + 24\lambda \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = -(\lambda-1)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

Eftersom egenvärdena till $\mathbf{A}$ är 1 och 10 är K positivt definit, vilket betyder att $K(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq 0$.

$\square$

10. (a) (1p) Låt V och W vara vektorrum. Definiera vad som menas med att en avbildning $T : V \to W$ är linjär.

(b) (1p) Låt $\mathbb{P}_2 = \{q :\ \text{q är ett polynom av grad högst 2}\}$. Definiera $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ sådan att

$$T(q(x)) = x \cdot \frac{dq}{dx}(x).$$

Visa att T är en linjär avbildning.

(c) (2p) Bestäm matrisavbildningen för T i basen $B = \big\{1, x, x^2\big\}$.

Lösning:

(a) En avbildning $T : V \to W$ är linjär om

i. T(x + y) = T(x) + T(y),

ii. T(sx) = s T(x),

för alla $x, y \in V$ och $s \in \mathbb{R}$.

(b) Låt $p, q \in \mathbb{P}_2$ och låt $s \in \mathbb{R}$. Vi har att

i. $T(p(x) + q(x)) = x \cdot \frac{d(p+q)}{dx}(x) = x \cdot \frac{dp}{dx}(x) + x \cdot \frac{dq}{dx}(x) = T(p(x)) + T(q(x))$,

ii. $T(sp(x)) = x \cdot \frac{d(sp)}{dx}(x) = sx \cdot \frac{dp}{dx}(x) = sT(p(x))$.

Alltså är T linjär.

(c) Matrisavbildningen $\mathbf{A}$ för T i basen B ges av

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} [T(1)]_B & [T(x)]_B & \big[T(x^2)\big]_B \end{array} \right)$$

Vi får att $T(1) = 0$, $T(x) = x$ och $T(x^2) = 2x^2$. Alltså får vi att

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$