Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i 5B1109, Linjär Algebra II för D1 och F1 fredagen den 24 oktober 2003 kl 14.00–19.00

Examinatorer: Tomas Ekholm och Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2003.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar. Skriv läsligt.

PROBLEM: (Uppgifternas ordning är oberoende av deras svårighetsgrad)

1. (3p) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (3p) Visa formeln

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \ldots + (n+1)(n+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6},$$

för alla heltal $n \geq 1$.

3. (3p) Punkten $(-2, -1, 1)$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ligger båda i ett plan. Bestäm planets ekvation.

4. (3p) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(1,2) = (3,1)$ och $T(-2,1) = (1,1)$. Bestäm $T(3,5)$.

5. (3p) Lös, i minstakvadratmening, det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = -9 \\ x_1 - 2x_2 = -12 \end{cases}.$$

6. Definiera i $\mathbb{R}^3$ inre produkten (skalärprodukten)

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3.$$

(a) (2p) För vilka värden på det reella talet a är vektorerna $\mathbf{w}_1 = (a,\ 1,\ a)$ och $\mathbf{w}_2 = (a,\ 1,\ 1)$ ortogonala.

(b) (2p) Låt nu $a = 2$. Bestäm en nollskild vektor $\mathbf{w}_3$ ortogonal mot $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$.

7. (4p) Lös ekvationen $z^6 - 2iz^3 - 4 = 0$. Svaret får anges på polär form.

8. (a) (2p) Låt V vara ett vektorrum. Definiera vad som menas med att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ i V är linjärt oberoende.

   (b) (2p) Visa att vektorerna $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 1 + 3x + x^2$ och $r(x) = 3 + x - x^2$ är linjärt beroende i $\mathbb{P}_2 = \{q : q \text{ är ett polynom av grad högst } 2\}$.

9. (4p) Låt $K(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$, för $x = \big(x_1,\ x_2,\ x_3\big)$. Undersök om det finns ett $\mathbf{x} \neq 0$ sådant att $K(\mathbf{x}) \leq 0$.

10. (a) (1p) Låt V och W vara vektorrum. Definiera vad som menas med att en avbildning $T : V \to W$ är linjär.

    (b) (1p) Låt $\mathbb{P}_2 = \{q :\ \text{q är ett polynom av grad högst } 2\}$. Definiera $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ sådan att

$$T(q(x)) = x \cdot \frac{dq}{dx}(x).$$

    Visa att T är en linjär avbildning.

    (c) (2p) Bestäm matrisavbildningen för T i basen $B = \big\{1, x, x^2\big\}$.