Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II för D1 och F1, 5B1109, fredagen den 9 januari 2004.

1. Ekvationen $z^3 = i$ är en binomisk ekvation. Då $\text{Arg}(i) = \pi/2$ och $|i| = 1$ så kommer beloppet av varje lösning att vara 1 och argumentet för lösningarna att vara $z_n = \pi/6 + 2n\pi/3$ för $n = 0, 1, 2$. Vi får

   Svar: $z_0 = e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$, $z_1 = e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3}/2 + i/2$, $z_2 = e^{i9\pi/6} = -i$.

2. Påståendet är sant för $n = 0$ eftersom $1 = (2 + 0 + 0)/2$.

   Vi visar nu att om $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så kommer $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n + 1)) = (2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2)/2$.

   Vi finner nämligen att om $1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = (2 + 5n + 3n^2)/2$ så gäller att

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3(n + 1)) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) + (1 + 3(n + 1)) =$$

$$\frac{2 + 5n + 3n^2}{2} + (1 + 3(n + 1)) = \frac{2 + 5n + 3n^2 + 2(1 + 3(n + 1))}{2} =$$

$$\frac{2 + 5(n + 1) + 3(n + 1)^2}{2}.$$

   Enligt induktionsaxiomet är nu påståendet sant.

3. Koefficientmatrisens determinant är

$$det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 7(a + 1).$$

   Om vi substituerar a med -1 is systemet och löser med vanlig Gausselimination får vi lösningarna

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

   För övriga värden på a erhålles med Gausseliminationen svaret

$$(x, y, z) = (0, 1, -1).$$

4. Om punkten $P = (x, y, z)$ ligger på bägge linjerna så gäller att

$$(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 1, 2) = (-2, 7, 1) + s(1, 0, 1)$$

   för några reella tal s och t. Detta ger systemet

$$(t - s, t, 2t - s) = (-5, 5, 0)$$

   som har lösningen $t = 5$ och $s = 10$. Eftersom en lösning finns så har linjerna en gemensam punkt.

5. Då

$$T(1)=\frac{<1,1+x>}{<1+x,1+x>}(1+x)=\frac{\int_{-1}^{1}1+x}{\int_{-1}^{1}1+2x+x^2}(1+x)=\frac{3}{4}(1+x)=\frac{3}{4}1+\frac{3}{4}x$$

och

$$T(x)=\frac{<x,1+x>}{<1+x,1+x>}(1+x)=\frac{\int_{-1}^{1}x+x^2}{\int_{-1}^{1}1+2x+x^2}(1+x)=\frac{1}{4}(1+x)=\frac{1}{4}1+\frac{1}{4}x$$

så blir avbildningens matris

$$T=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

6. b) Matrisen $A:s$ karakteristiska ekvation $det(A-\lambda I)=0$ är

$$((1-\lambda)^2-9)(-2-\lambda)=0$$

som har rötterna $\lambda=-2$ (dubbelrot) och $\lambda=4$. Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda=4$, fås på sedvanligt sätt till $e=t(1,1,0)$, t reellt tal. Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda=-2$ är vektorerna $e=t(1,-1,0)+s(0,0,1)$.

För att kunna genomföra den ortogonala diagonaliseringen behövs en ON-bas av egenvektorer. Egenvektorerna $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ och $(0,0,1)$ bildar en ortogonalbas. Vi normerar dessa vektorer och bildar matrisen P med de normerade vektorerna som kolonner och matrisen D med egenvärdena som diagonalelement:

$$P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

För dessa matriser har vi diagonaliseringen av matrisen A:

$$A=PDP^T.$$

7. Vi andvänder Gram-Schmidts metod för att hitta en ortogonalbas. Låt $f_1=(1,1,-1,2,3)$ och

$$f_2=(2,3,1,3,2)-\frac{(1,1,-1,2,3)\cdot(2,3,1,3,2)}{(1,1,-1,2,3)\cdot(1,1,-1,2,3)}(1,1,-1,2,3)=(1,2,2,1,-1).$$

Vidare låter vi

$$f_3=(3,1,0,-3,2)-\frac{(1,1,-1,2,3)\cdot(3,1,0,-3,2)}{(1,1,-1,2,3)\cdot(1,1,-1,2,3)}(1,1,-1,2,3)-$$

$$\frac{(1,2,2,1,-1)\cdot(3,1,0,-3,2)}{(1,2,2,1,-1)\cdot(1,2,2,1,-1)}(1,2,2,1,-1)=\frac{1}{4}(11,3,-1,-14,5).$$

Vi normerar dessa vektorer och får

Svar: $e_1=\frac{1}{4}(1,1,-1,2,3)$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-1,2,3)$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{352}}(11,3,-1,-14,5)$.

8. b) En vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) tillhör det sökta ortogonala komplementet precis då

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 0, 0, 1) = 0 \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, 2, 0, 1) = 0.$$

Dessa ekvationer ger ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer vars lösningsmängd är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(2, 1, 0, -2) + t(0, 0, 1, 0)$$

och alltså

Svar: $\mathrm{span}\{(2, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0)\}$

9. a) Om $< x_1, y >=< x_2, y >$ för alla y så gäller att $< x_1 - x_2, y >= 0$ för alla y, dvs $x_1 - x_2$ är ortogonal mot alla vektorer y i vektorrummet.

b) Låt $y = x_1 - x_2$. Vi får då att $< x_1 - x_2, x_1 - x_2 >= 0$ med enda möjligheten att $x_1 - x_2 = 0$.

10. a) Antag f_1, f_2, f_3 bas sådan att T:s matris i denna bas är diagonalmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Då skulle $T(f_i) = \lambda_i$, för $i = 1, 2, 3$, dvs basvektorerna vore egenvektorer. Avbildningens geometriska beskrivning ger att vektorn $f_1 = (2, 1, 3)$ är en egenvektor till T och med egenvärdet 1 och att varje vektor v som är ortogonal mot denna vektor avbildas på vektorn $-v$. Två linjärt oberoende sådana vektorer är t ex $f_2 = (1, 1, -1)$ och $f_3 = (3, 0, -1)$, som då är egenvektorer hörande till egenvärdet -1.

b) Egenvektorer och egenvärden är oberoende av matrisbeskrivning och enbart en geometrisk företeelse, så se uppgift a).