Institutionen för matematik
KTH

Tentamen i 5B1109, Linjär Algebra II för D1 och F1 fredagen den 9 januari 2004 kl 08.00–13.00

Examinatorer: Tomas Ekholm och Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: Maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2003.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar. Skriv läsligt.

PROBLEM: (Uppgifternas ordning är oberoende av deras svårighetsgrad)

1. (3p) Lös ekvationen $z^3 = i$.
2. (3p) Visa att
$$1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + 3n) = \frac{2 + 5n + 3n^2}{2},$$
för alla heltal $n \geq 0$.
3. (3p) Ange för alla $a \in \mathbb{R}$ lösningen till ekvationssystemet
$$\begin{cases} -2x + y + 2z = -1 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$
4. (3p) Visa att linjerna
$$L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$
skär varandra i en punkt.
5. (3p) Låt $p(x) = 1 + x$ och avbildningen $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ vara sådan att
$$T(q) = \mathrm{proj}_p\, q,$$
där $\mathbb{P}_1$ betecknar mängden av alla polynom av grad högst 1 försedd med inre produkten $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Bestäm matrisavbildningen för T i basen $B = \{1, x\}$.
6. (a) (2p) Definiera vad som menas med att λ är ett egenvärde till $\mathbf{A}$ och x en egenvektor till $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdet λ.

   (b) (2p) Diagonalisera ortogonalt matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
7. (4p) Bestäm i $\mathbb{R}^5$ med standardskalärprodukten en ortonormerad bas för det delrum som spänns upp av vektorerna $(1,\,1,\,-1,\,2,\,3)$, $(2,\,3,\,1,\,3,\,2)$ och $(3,\,1,\,0,\,-3,\,2)$.

8. Låt U vara ett delrum av ett vektorrum V.

   (a) (2p) Definiera vad som menas med det ortogonala komplementet till U i V.

   (b) (2p) Låt $V = \mathbb{R}^4$ och U vara det linjära höljet av vektorerna $\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}0, & 2, & 0, & 1\end{pmatrix}$. Bestäm det ortogonala komplementet till U i V.

9. Låt V vara ett vektorrum med inre produkt (skalärprodukt) $< u, v >$ för $u, v \in V$. Antag att $< x_1, y > = < x_2, y >$ för alla $y \in V$.

   (a) (2p) Visa att $x_1 - x_2$ är ortogonal mot varje vektor i V.

   (b) (2p) Visa att $x_1 = x_2$.

10. En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras som en vriding med vinkeln π runt linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2p) Finns det någon bas sådan att matrisen för T är en diagonalmatris? (Glöm ej motivering.)

   (b) (2p) Låt $\mathbf{A}$ vara matrisavbildningen för T i standardbasen. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer för denna matris.