Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II för F1 och D1, 5B1109, 16 augusti 2004.

1. Ekvationen kan skrivas

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$$

eller förenklat $x+2y+3z=6$. Punkten $(x,y,z)=(3,2,1)$ ligger inte planet eftersom dessa värden på x, y och z inte satisfierar denna ekvation.

2. Vi bestämmer först mängden av $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ sådana att $A\mathbf{x}^T=0$. Denna ekvation är ekvivalent med ekvationssystemet

$$3x_1+x_2+4x_3=0, \quad x_1+2x_2+3x_3=0, \quad x_1-x_2=0$$

som efter Gausselimination funnes ha lösningarna $(x_1,x_2,x_3)=t(1,1,-1)$, t godtyckligt reellt tal. Detta delrum har dimension 1.

Svar: Dimensionen är ett.

3. Gausselimination ger lösningsmängden

Svar: $(x,y,z)=(-1,2,2)$.

4. a) Se läroboken.

b) Kolonn ett i matrisen skall med standardskalärprodukten vara vinkelrät mot andra kolonnen, dvs

$$a\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}=0.$$

Enda möjliga a värde är $a=-2$. På samma sätt blir enda möjliga b-värdet $b=0$.

Svar: $a=-1$ och $b=0$.

5. Kvadratkomplettering omformar ekvationen till

$$(z-\frac{3}{2})^2=\frac{-3-4i}{4}.$$

Ansatsen $w=a+ib$ satisfierande $w^2=-3-4i$ ger ekvationerna

$$a^2-b^2=-3, \quad 2ab=-4, \quad a^2+b^2=5,$$

där den sista ekvationen kommer från att beloppet av w^2 är lika med beloppet av $-3-4i$. Första och sista ekvationen ger att $2a^2=2$, dvs $a=\pm 1$. Därur $w=\pm(1-2i)$. Vi får

Svar: $z=\frac{3}{2}\pm\frac{1-2i}{2}$ dvs $z=2-i$ eller $z=1+i$.

6. Systemet

$$\lambda_1 p_1(x)+\lambda_2 p_2(x)+\lambda_3 p_3(x)+\lambda_4 p_4(x)=0+0x+0x^2+0x^3$$

har lösningarna

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=t(-2,-1,1,0)+s(-2,1,0,1), \quad s,t\in R.$$

Härur framgår att $p_3(x) = 2p_1(x) + p_2(x)$ och $p_4(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$. Polynomen $p_1(x)$ och $p_2(x)$ är inte multiplar av varandra och således linjärt oberoende. De spänner upp rummet och blir därmed en bas för rummet.

Svar: En bas för rummet är $p_1(x)$ och $p_2(x)$.

7. Vi använder ett induktionsbevis. Olikheten är sann om $n = 2$ ty

$$1^2 + 2^2 = 5 < 2^3.$$

Vi visar nu att implikationen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 < (n+1)^3$$

alltid är sann om $n \geq 2$. Vi obesrverar att $\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3$ medför att

$$(n+1)^3 - \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 - (n+1)^2 > (n+1)^3 - n^3 - (n+1)^2 = 2n^2 + n$$

som ju definitivt är positivt om $n \geq 2$. Detta visar implikationen. Enligt induktionsaxiomet är nu den givna olikheten sann för de angivna värdena på n.

8. a) För att verifiera linjariteten visar vi att

$$(T(\lambda p + \mu q)) = \lambda(T(p)) + \mu(T(q)).$$

Vi finner att för alla x så gäller att

$$(T(\lambda p + \mu q))(x) = x \cdot (\lambda p + \mu q)(x) = \lambda x \cdot p(x) + \mu x \cdot q(x),$$

vilket ju är det vi skulle visa.

b) Vi finner att

$$(T(1))(x) = x \cdot 1 = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

och att

$$(T(x))(x) = x \cdot x = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

Svar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Bestämmer först egenvärden och egenvektorer på sedvanligt sätt. Karkteristiska polynomet

$$det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

har nollställena $\lambda = 1$ och $\lambda = 4$. Tillhörande egenvektorer blir för $\lambda = 1$, $(x, y) = t(1, -1)$, och för $\lambda = 4$, $(x, y) = t(2, 1)$. Med nedanstående matriser Toch D kan A uttryckas: $A = TDT^{-1}$ och $A^n = TD^nT^{-1}$,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Då

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

så

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4^n & -2 + 2 \cdot 4^n \\ -1 + 4^n & 2 + 4^n \end{pmatrix}.$$

10. b) Låt $f = x^2 - x$. Då gäller att $f(0) = 0$ och $f(1) = 0$. Detta medför att

$$< f, f >= f(0)f(0) + f(1)f(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Detta strider mot kravet att $< f, f >> 0$ för alla $f \neq 0$.