LÖSNINGAR TILL TENTAN I LINJÄR ALGEBRA

5B1109 FÖR DI OCH FI MÅND 6 DEC 04

1) kvadratkomplettering av $z^2+(i+\frac{1}{\sqrt{3}})z-\frac{1}{3}=0$ ger

$$(z+\frac{1}{2}(i+\frac{1}{\sqrt{3}}))^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}(-1+\frac{1}{3}+i(\frac{2}{\sqrt{3}}))=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{3}e^{i\pi/3}$$

$$\Rightarrow z_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}) \text{ och } z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+i(\frac{-1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}})$$

2) Låt $VL(n)$ och $HL(n)$ beteckna vänstra resp. högra ledet för heltalet n. Induktion över n ska användas. För $n=1$ ser vi $VL(1)=\cos\frac{x}{2}$ och $HL(1)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=HL(1)$. Antag $VL(n)=HL(n)$

$$VL(n+1)=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\sin x}{2^n\cdot 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=HL(n+1)$$

3) Gausselimination ger $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$

om $a=2$ saknas lösning då sista raden i vänstra ledet är noll men inte i högra ledet.

om $a\neq 2$ får vi $X=\begin{pmatrix}\frac{2}{2-a}&1\\\frac{a}{2-a}&1\\\frac{-2}{2-a}&0\end{pmatrix}$

4) Vi bestämmer $t\in\mathbb{R}$ så att $A+tN\in$ planet där $N=$ normal $=(2,1,2)$. Detta ger

$2(1+2t)+1\cdot(2+t)+2(3+2t)=1 \Rightarrow\ldots\Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow B=A-2N=(-3,0,-1)$

5) Vi läser b direkt. Det ger systemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&2&0&1&0\\1&-1&2&2&0\\1&1&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\0&3&1&0&0\\0&1&2&3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\0&1&2&3&0\\0&0&-5&-9&0\end{array}\right)$$

en lösning är $(11,3,-9,5)$ som ger ON-bas

$$\{(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{\sqrt{236}}(11,3,-9,5)\}\text{ t.ex.}$$

6) $\det A(x) = \det \begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & & 1 \\ \vdots & & & & \\ x+n-1 & 1 & 1 & & x \end{pmatrix} = (x+n-1)\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (x+n-1)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & & x-1 \end{pmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$

7) $T(1) = (x+1)\cdot 0 + 1 = 1$, $T(1+x) = (x+1)\cdot 1 + 1$

$T(x^2+x+1) = T(x^2) + T(x+1) = (-1)1 + 1\cdot(x+1) + 2(x^2+x+1)$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (-\lambda-1)(-\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 1$ ger egenvekt

$u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$

$u_3 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ och $u_4 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$

Som ger ON-bas för $\mathbb{R}^4$

9) Gausselim ger $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & a \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} a^2(2-a)$

Om $a=0$ försvinner de två siste raden

$\Rightarrow$ rank $= 2$

• om $a=2$ ser vi att ranken $= 3$

10) $\det(AB-\lambda I) = \det(A(B-\lambda A^{-1})) = \det A \cdot \det(B-\lambda A^{-1})$

$\det(AB-\lambda I) = \det((B-\lambda A^{-1})A) = \det(B-\lambda A^{-1}) \det B$

$\therefore \quad P_{AB} = P_{BA}$