Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin, Lars Svensson

5B1109, Linjär Algebra II för D1 och F1
Tentamen, måndagen den 6 dec 2004 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2004.

(3p) **1.** Ange komplexa lösningar till ekvationen

$$3z^2 + (3i + \sqrt{3})z - 1 = 0.$$

(3p) **2.** Visa att

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

för $x \neq 2\pi k$, k är heltal.

(3p) **3.** Betrakta matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För vilka reela a har ekvationen lösningar? Lös ekvationen för dessa a.

(3p) **4.** Punkterna $A(1, 2, 3)$ och $B(u, v, w)$ är spegelbilder av varandra i planet

$$2x + y + 2z = 1.$$

Bestäm koordinaterna (u, v, w) av punkten B.

5. Underrummet W i Euklidiska rummet $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorer $(-1, 2, 0, 1)$ och $(1, -1, 2, 2)$.

(2p) (a) Bestäm någon bas av det ortogonala komplementet $W^\perp$ till W.

(2p) (b) Komplettera vektorn $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ till någon ortonormal bas av $W^\perp$.

VÄND!

(4p) **6.** Betrakta matris

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix},$$

d v s $A_{ii}(x) = x$ och $A_{ij}(x) = 1$ för $i \neq j$. Bestäm determinanten av $A(x)$.

(3p) **7.** Linjära transformationen T i rummet P_2 av polynom av grad högst 2 definieras som

$$T(p(x)) = (x+1)p'(x) + p(0).$$

Bestäm matrisen av transformationen T i basen $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$.

(3p) **8.** Finn någon ortonormal bas (med avseende på standard inreprodukten) av egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2p) **9.** (a) Definiera begreppet rank av en matris.

(2p) (b) Bestäm ranken av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & a+2 \\ 1 & -3-a & 2-4a & 2-a \\ 1 & -3-2a & 2-5a & 2-2a \end{pmatrix}$$

(beroende på en reel parameter a).

(4p) **10.** Låt A och B vara inverterbara kvadratiska matriser av formatet $n \times n$. Visa att matriserna AB och BA har samma karakteristiska polynom.

(Ledning: i uttrycket $\lambda I - AB$ bryt ut A genom att skriva $I = AA^{-1}$. Analogt för uttrycket $\lambda I - BA$).