Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kompletteringskurs till Linjär algebra, 5B1110, 16 augusti 2004.

1. Vi använder ett induktionsbevis. Olikheten är sann om $n = 2$ ty

$$1^2 + 2^2 = 5 < 2^3.$$

Vi visar nu att implikationen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 < (n+1)^3$$

alltid är sann om $n \geq 2$. Vi obesrverar att $\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3$ medför att

$$(n+1)^3 - \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 - (n+1)^2 > (n+1)^3 - n^3 - (n+1)^2 = 2n^2 + n$$

som ju definitivt är positivt om $n \geq 2$. Detta visar implikationen. Enligt induktionsaxiomet är nu den givna olikheten sann för de angivna värdena på n.

2. a) För att verifiera linjariteten visar vi att

$$(T(\lambda p + \mu q)) = \lambda(T(p)) + \mu(T(q)).$$

Vi finner att för alla x så gäller att

$$(T(\lambda p + \mu q))(x) = x \cdot (\lambda p + \mu q)(x) = \lambda x \cdot p(x) + \mu x \cdot q(x),$$

vilket ju är det vi skulle visa.

b) Vi finner att

$$(T(1))(x) = x \cdot 1 = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

och att

$$(T(x))(x) = x \cdot x = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

Svar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Systemet

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

har lösningarna

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = t(-2, -1, 1, 0) + s(-2, 1, 0, 1), \quad s, t \in R.$$

Härur framgår att $p_3(x) = 2p_1(x) + p_2(x)$ och $p_4(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$. Polynomen $p_1(x)$ och $p_2(x)$ är inte multiplar av varandra och således linjärt oberoende. De spänner upp rummet och blir därmed en bas för rummet.

Svar: En bas för rummet är $p_1(x)$ och $p_2(x)$.

4.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. b) Låt $f = x^2 - x$. Då gäller att $f(0) = 0$ och $f(1) = 0$. Detta medför att

$$< f, f >= f(0)f(0) + f(1)f(1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Detta strider mot kravet att $< f, f >> 0$ för alla $f \neq 0$.