Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Onsdagen den 18 december 2002, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Lös ekvationen $z^2 - (2-8i)z - 16i = 0$. (4p)

2. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \frac{1}{xy}$ i punkten $(2, \frac{1}{2}, 1)$. (4p)

3. Bestäm alla vektorer v med längden ett som uppfyller följande villkoret: Riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = x^2 + \sqrt{2}\,x\,y - y^2$ i punkten $(0,1)$ i riktningen v är $= 0$. (4p)

4. Beräkna integralen $\iint_D y\,dxdy$ där D är området mellan kurvorna $y = \sqrt{1-x}, y = \sqrt{1+x}$ och linjen $y = 0$. (4p)

5. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

. (4p)

6. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 - 4xy^2$ i området $x^2 + 4y^2 \leq 1$. (4p)

7. Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator och $D_1 f(0,0) = 2$, $D_2 f(0,0) = -1$. Låt $h(x,y) = f(\ln x, x+y)$. Bestäm grad $h(1,-1)$. (5p)

v.g. vänd

8. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (6p)

9. Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 + 1,\ 2x^2y - 6y - \frac{1}{y})$ är konservativt i halvplanet $\{(x, y) : y > 0\}$.

a) Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. (4p)

b) Beräkna linjeintegralen $\int_C (2xy^2 + 1)\, dx + (2x^2y - 6y - \frac{1}{y})\, dy$ där C är kurvan $y = e^{\sqrt{x}}$ från $(0, 1)$ till $(1, e)$. (2p)

10. Beräkna ytintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, -yz, z^3)$, S är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S. (6p)

11. Beräkna linjeintegralen $\oint (x + y)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$ längs följande väg: parabeln $y = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till punkten $(1, 1)$ och sedan tillbaka till punkten $(-1, 1)$ längs en rät linje. (6p)

12. Antag att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

där a är en konstant, $a \neq 0$. Bestäm en diagonalmatris D och en ortogonalmatris P så att $A = PDP^t$. (6p)

13. Beräkna integralen

$$\iiint_K xz\, dx\, dy\, dz$$

där K är tetraedern som bestäms av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$. (7p)

Lösningar till tentamensskrivningen den 18 december 2002
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Genom kvadratkomplettering får vi $(z-(1-4i))^2 = (1-4i)^2+16i$. Låt $z-(1-4i) = a+bi$. Ekvationen blir $(a+bi)^2 = -15+8i$ dvs. $a^2-b^2 = -15$ och $2ab = 8$. Substitutionen $b = \frac{4}{a}$ i första ekvationen ger $a^4+15a^2-16 = 0$. Lösningarna är $a = \pm 1$ och $b = \frac{4}{a} = \pm 4$. Svar: $\underline{z = 2}$ och $\underline{z = -8i}$.

2. De partiella derivatorna till $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ är $D_1 f(x,y) = \frac{-1}{x^2y}$ och $D_2 f(x,y) = \frac{-1}{xy^2}$. En normal till ytan i punkten $(2, \frac{1}{2}, 1)$ är $(-\frac{1}{2}, -2, -1)$. Tangentplanets ekvation är $\frac{1}{2}(x-2) + 2(y-\frac{1}{2}) + z - 1 = 0$ dvs. $\underline{x + 4y + 2z - 6 = 0}$.

3. Gradienten till $f(x,y) = x^2 + \sqrt{2}xy - y^2$ är $\operatorname{grad} f(x,y) = (2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x - 2y)$, och $\operatorname{grad} f(0,1) = (\sqrt{2}, -2)$. Låt $v = (\alpha, \beta)$ där $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Riktningsderivatan

$$D_v f(0,1) = \operatorname{grad} f(0,1) \cdot v = (\sqrt{2}, -2) \cdot (\alpha, \beta) = \sqrt{2}\alpha - 2\beta.$$

För att $D_v f(0,1)$ skulle vara $= 0$, måste $\alpha = \sqrt{2}\beta$. Eftersom $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, får vi att $\beta^2 = \frac{1}{3}$ dvs. $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Svar: $v = \underline{\pm(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})}$.

4. I x-riktningen ligger området D mellan kurvorna $x = y^2 - 1$ och $x = 1 - y^2$. Eftersom $0 \le y \le 1$, får vi

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_{y^2-1}^{1-y^2} y\,dx \Big) = \int_0^1 y((1-y^2) - (y^2-1))\,dy$$

$$= 2\int_0^1 y(1-y^2)dy = \underline{\frac{1}{2}}$$

5. Det karakteristiska polynomet till A är $\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$. Egenvärden är $\underline{6 \text{ och } 1}$. Egenvektorerna är lösningar rill ekvationen $(A - \lambda I)X = 0$. För $\lambda = 6$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ Egenvektorerna är $\underline{t(4,1),\ t \in \mathbf{R}, t \neq 0}$. Egenvektorerna som motsvarar egenvärdet 1 är $\underline{t(-1,1),\ t \in \mathbf{R}, t \neq 0}$.

$\det(B-\lambda I)=(\lambda-3)^2$. Matrisen har ett egenvärde: $\underline{\lambda = 3}$. Motsvarande egenvektorerna är $\underline{t(-2,1),\ t\in\mathbf{R}, t\neq 0}$.

6. 1) I de kritiska punkterna är $D_1 f(x,y) = 2x-4y^2 = 0$ och $D_2 f(x,y) = -8xy = 0$. Origo är den enda kritiska punkten och $f(0,0)=0$.

2) På ellipsen $x^2+4y^2=1$ är $f(x,y)=g(x)=x^2-x(1-x^2)$. Derivatan $g'(x) = 3x^2+2x-1 = 0$ (för $-1<x<1$) om $x=\frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{3},\pm\frac{\sqrt{2}}{3}) = -\frac{5}{27}$. Intervallets ändpunkter är ± 1 och $f(\pm 1, 0) = 1$.

Från 1) och 2) följer att största värdet av f är $\underline{1}$ och minsta värdet $\underline{-\frac{5}{27}}$.

7. Låt $h(x,y)=f(G(x,y))$, där $G(x,y)=(\ln x, x+y)$. Jacobimatrisen av G är $J_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} D_1 h(1,-1) & D_2 h(1,-1) \end{pmatrix} = J_f(G(1,-1))J_G((1,-1))$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 f(0,0) & D_2 f(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Svar: $\operatorname{grad} h(1,-1) = \underline{(1,-1)}$.

8. Ytornas skärningskurvans projektion i xy -planet är $x^2+y^2=1$. Eftersom ytan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ är ovanför ytan $z=x^2+y^2$ är volymen

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2))\, dx\, dy.$$

I polära koordinater

$$V = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (r-r^2)r\, dr)\, d\varphi = 2\pi[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{6}}.$$

9. a) Om $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, så är $D_1 u = 2xy^2+1$. Genom integration får vi $u(x,y) = x^2y^2+x+g(y)$. Då är $D_2 u = 2x^2y+g'(y) = 2x^2y-6y-\frac{1}{y}$. Det följer att $g'(y) = -6y-\frac{1}{y}$. Eftersom funktionen $\underline{u(x,y) = x^2y^2+x-3y^2-\ln y}$ uppfyller villkoret $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, så är $\mathbf{F}$ konservativt och u är en potentialfunktion till $\mathbf{F}$.

b) $\int_C (2xy^2+1)\, dx + (2x^2y-6y-\frac{1}{y})\, dy = u(1,e)-u(0,1) = e^2+1-3e^2-1+3 = \underline{3-2e^2}$.

10. Med hjälp av divergenssatsen får vi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = 3\iiint_K z^2\, dxdydz.$$

där K är enhetsklotet. Med sfäriska koordinater

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 3\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi dr = \underline{\frac{4\pi}{5}}.$$

11. Enligt Green's formel är integralen $\mathrm{I} = \iint_A (D_1F_2 - D_2F_1)dxdy = \iint_A (2x-1)dxdy$ där A är området innanför den slutna integrationsvägen. Vi får $I = \int_{-1}^1 (\int_{x^2}^1 (2x-1)dx)dy = \int_{-1}^1 (2x-1)(1-x^2)dx =$
$= \int_{-1}^1 2x(1-x^2)dx - \int_{-1}^1 (1-x^2)dx$ där integranden är udda resp. jämn. Integralen $I = -2\int_0^1 (1-x^2)dx = \underline{-\frac{4}{3}}$.

12. Det karakteristiska polynomet är $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)^2 - a^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2$. Egenvärden är $1 \pm a$. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(A-\lambda I)X = 0$. För $\lambda = 1+a$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$ som är radekvivalent med $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Lösningarna är $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. För $\lambda = 1-a$ är lösningarna $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är ortogonala (eftersom A är en symmetrisk matris). A kan diagonaliseras med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Matrisen $\underline{P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ är ortogonal och $\underline{P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}}$. Då är $A = PDP^{-1} = PDP^t$. Eftersom P är ortogonal.

13. Låt T vara triangeln: $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$.

$$\iiint_K xz\,dz\,dy\,dx = \iint_T (\int_0^{1-x-y} xzdz)\,dx\,dy = \iint_T \frac{x}{2}(1-x-y)^2\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1-x-y)^2 dy)dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 x[(1-x-y)^3]_{y=0}^{1-x} dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3 dx = \frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = \underline{\frac{1}{120}}.$$