Lösningar till tentamen den 22 april 2003
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Genom kvadratkomplettering får vi $(z+\frac{3i-2}{2})^2-\frac{(3i-2)^2}{4}-1-3i=0$. Det följer att $(z+\frac{3i-2}{2})^2=-1/4$. Vidare är $z+\frac{3i-2}{2}=\pm\frac{i}{2}$. Svar: $\underline{z=1-2i}$ och $\underline{z=1-i}$.

2. Derivering ger grad $f(x,y,z)=(\cos^{-2}(x-y+3z),-\cos^{-2}(x-y+3z),3\cos^{-2}(x-y+3z)$ och grad $f(3,0,-1)=(1,-1,3)$. Riktningsderivatan $D_uf(3,0,-1)=(1,-1,3)\cdot u$ är störst i gradientens riktning. För $u=\frac{(1,-1,3)}{\sqrt{11}}$ är $D_uf(3,0,-1)=\sqrt{11}$. Svar: Riktningsderivatan är störst i riktningen $\underline{(1,-1,3)}$ och dess största värde är $\underline{\sqrt{11}}$.

3. I en kritisk punkt är $D_1f(x,y)=0$ och $D_2f(x,y)=0$, dvs. $3x^2+3y=0$ och $3y^2+3x=0$. Det följer att $3x^4+3x=0$. De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(-1,-1)$. I en punkt (x,y) är $AC-B^2=D_{11}fD_{22}f-(D_{12}f)^2=36xy-9$.
1) I origo är $AC-B^2=-9$. Origo är således en sadelpunkt.
2) I punkten $(-1,-1)$ är $AC-B^2=27>0$ och $A=-6<0$. Funktionen har lokalt maximum i punkten $(-1,-1)$.

4. Enligt Green's formel är integralen $=\iint_A(D_1F_2-D_2F_1)dxdy=\iint_A 2ydxdy$ där A är området innanför den slutna integrationsvägen. Vi får $\oint_C\sqrt{1+x^3}\,dx+2xy\,dy=\int_0^1(\int_0^{3x}2ydy)dx=\int_0^1 9x^2dx=3$.

5. Låt $G(x,y)=(x^2-y^2,xy)$. Jacobimatrisen av G är $\begin{pmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln är $D_1g=2xD_1f+yD_2f$ och $D_2g=-2yD_1f+xD_2f$. Det följer att

$$xD_1g+yD_2g=2x^2D_1f+xyD_2f-2y^2D_1f+xyD_2f=2uD_1f+2vD_2f.$$

6. Låt $z=t$ och $y=s$. Då är $x=-2s+5t$. Vi får $(x,y,z)=(-2s+5t,s,t)=s(-2,1,0)+t(5,0,1)$. Varje vektor i vektorrummet kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(-2,1,0)$ och $(5,0,1)$ som är linjärt oberoende och uppfyller ekvationen. Svar: En bas är $\{(-2,1,0),(5,0,1)\}$.

7. a) Från ekvationerna $D_1\mathbf{F}_2=D_2\mathbf{F}_1=0$, $D_1\mathbf{F}_3=D_3\mathbf{F}_1=1$, och $D_2\mathbf{F}_3=D_3\mathbf{F}_2=0$, följer att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. Funktionen $u(x,y,z)=xz+\frac{y^2}{2}$ är en potential till $\mathbf{F}$.

b) och c) Eftersom $D_1\mathbf{G}_2 = 0, D_2\mathbf{G}_1 = 1$ och $D_1\mathbf{H}_2 = 1, D_2\mathbf{H}_1 = 0$ så är varken $\mathbf{G}$ eller $\mathbf{H}$ konservativt.

8. Låt $f(x,y) = x + \sqrt{3}\,y^2$. Eftersom $D_1 f(x,y) = 1$ och $D_2 f(x,y) = 2\sqrt{3}\,y$ är

$$\iint_S y\,dS = \int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{1+1+12y^2}dy = \int_0^2 y\sqrt{2+12y^2}dy$$

$$= \frac{1}{36}[(2+12y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 = \frac{1}{36}(50^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \underline{\frac{62\sqrt{2}}{9}}.$$

9. I polära koordinater är integrationsområdet en rektangel D: $1 \leq r \leq \sqrt{3}, -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. Vi får $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \frac{r\cos\theta}{r^2} r\,drd\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int_1^{\sqrt{3}} dr = \underline{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).}$

10. Sfären och konen skär varandra längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1/2, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Enligt divergenssatsen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K 2z\,dxdydz = \iint_D (\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\,dz)dxdy$$

där K är kroppen innanför den slutna ytan S och D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1/2$. Vidare är

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D (1 - 2x^2 - 2y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} (\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2r^2)rdr)d\theta = 2\pi[\frac{r^2 - r^4}{2}]_0^{1/\sqrt{2}} = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

11. Matrisen till T är $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$. Egenvärden är $1, 5$ och 6. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(A - \lambda I)X = 0$. För $\lambda = 1$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lösningarna är $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

För $\lambda = 5$ resp. 6 fås egenvektorerna $X = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ resp. $X = t\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $t \in \mathbf{R}$ $t \neq \bar{0}$. Egenvektorerna är ortogonala eftersom A är en symmetrisk matris. Matrisen $\underline{P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}}$ är ortogonal och $P^tAP = \underline{D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}}$.

12. Vi använder sfäriska koordinater $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$.

$$\iiint_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz. = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}(\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^2\sin\phi d\rho)\,d\phi)\,d\theta)$$

Genom partiell integration får vi

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^2\,d\rho = [-\rho^2e^{-\rho}]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho}\,d\rho = -2[\rho e^{-\rho}]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\rho}\,dr = 2.$$

där vi har använt att $\lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho^2}{e^{\rho}} = \lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho}{e^{\rho}} = 0$. Vidare är

$$\iiint_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz. = 2\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi)d\,\theta = \underline{8\pi}.$$

13. Avståndet från origo till en punkt (x, y, z) på ytan är $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ där $xy^2z^3 = 2$. Eftersom $y^2 = \frac{1}{xz^3}$, så är $xz > 0$. Låt $f(x,z) = x^2 + \frac{2}{xz^3} + z^2$. Vi bestämmer de kritiska punkterna till f:

$$\begin{cases} D_1f(x,z) & = 2x - \frac{2}{x^2z^3} = 0\\ D_2f(x,z) & = 2z - \frac{6}{xz^4} = 0\end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x^3z^3 = 1\\ xz^5 = 3\end{cases}$$

Den första ekvationen är ekvivalent med $xz = 1$. Insättning i den andra ekvationen ger $x^4 = \frac{1}{3}$. Vi får att $x = \pm 3^{-1/4}$. De kritiska punkterna är $\pm(3^{-1/4}, 3^{1/4})$ och $f(\pm(3^{-1/4}, 3^{1/4})) = 2\sqrt{3}$. P.g. av symmetrin kan vi anta att $x > 0$xs och $z > 0$. Om $x \to 0+$ (resp. $z \to 0+$) och z (resp. x) är begränsad, så $f(x,z) \to \infty$. Också om x eller $z \to \infty$, så $f(x,z) \to \infty$. Minsta värdet för f är således $2\sqrt{3}$.

Svar: Punkterna $\pm(3^{-1/4}, \sqrt{2}\,3^{-1/4}, 3^{1/4}))$ och $\pm(3^{-1/4}, -\sqrt{2}\,3^{-1/4}, 3^{1/4}))$ är närmast origo.