Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Tisdagen den 22 april 2003, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Lös ekvationen $z^2 + (3i - 2)z - 1 - 3i = 0$. (4p)

2. Låt $f(x, y, z) = \tan(x - y + 3z)$. I vilken riktning är riktningsderivatan av f störst i punkten $(3, 0, -1)$? Ange också det största värdet av riktningsderivatan. (4p)

3. Sök de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ och bestäm deras karaktär. (4p)

4. Beräkna $\oint_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy$ där C är randen till triangeln med hörn $(0, 0), (1, 0)$ och $(1, 3)$ och C genomlöps en gång moturs. (4p)

5. Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Låt $g(x, y) = f(u, v)$ där $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$. Visa att

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 2u\frac{\partial f}{\partial u} + 2v\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(4p)

6. Bestäm en bas för vektorrummet $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y - 5z = 0\}$. (4p)

v.g. vänd

7. Avgör om följande vektorfält är konservativa och bestäm potentialfunktion i förekommande fall.
a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$
b) $\mathbf{G}(x, y, z) = (y, z, x)$
c) $\mathbf{H}(x, y, z) = (z, x, y)$. (4p)

8. Beräkna $\iint_S y\, dS$ där S är ytan $z = x + \sqrt{3}\, y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. (6p)

9. Beräkna $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$ över området A som bestäms av olikheterna $x > 0, |y| \le x$ och $1 \le x^2 + y^2 \le 3$. (6p)

10. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy^4, x^3, z^2)$, S är begränsningsytan till kroppen $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$, och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S. (6p)

11. En linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras genom

$$T(x, y, z) = (5x - 2z,\ 5y, -2x + 2z).$$

a) Bestäm T:s matris ($= A$) i standardbasen. (2p)
b) Visa att A :s egenvärden är $1, 5$ och 6 och bestäm dess egenvektorer. (2p)
c) Bestäm en diagonalmatris D och en ortogonalmatris P så att $P^t AP = D$. (2p)

12. Beräkna den generaliserade integralen

$$\iiint_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

(6p)

13. Bestäm de punkter på ytan $xy^2z^3 = 2$ som är närmast origo. (8p)
