Lösningar till tentamen den 27 augusti 2003
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Kvadratkomplettering ger $(z-(1-i))^2 = -3-2i+(1-i)^2$. Låt $z-(1-i) = a+bi$. Då är $(a+bi)^2 = -3-4i$ dvs. $a^2-b^2 = -3$ och $2ab = -4$. Vi sätter in $b = -2a^{-1}$ i den första ekvationen och får $a^4+3a^2-4 = 0$. Vidare är $a^2 = \frac{-3\pm 5}{2}$ som ger $a = \pm 1$. Från ekvationen $z-1+i = \pm(1-2i)$ får vi lösningarna Svar: $\underline{z = i}$ och $\underline{z = 2-3i}$.

2. Området A kan beskrivas med olikheterna $y \leq x \leq 2-y$, $0 \leq y \leq 1$.
$\iint_A xy\,dxdy = \int_0^1 y(\int_y^{2-y} xdx)dy = \int_0^1 y\frac{(2-y)^2-y^2}{2}dy = \int_0^1 (2y-2y^2)dy = [y^2 - \frac{2y^3}{3}]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$.

3. En parameterframställning till kurvan C är $x = t, y = \frac{1}{t}$, där $t : 1 \to \frac{1}{3}$. Då är $dx = dt$ och $dy = -\frac{1}{t^2}dt$. Vi får

$$\int_C -xy^3\,dx + 2x^2y\,dy = \int_1^{\frac{1}{3}} -t\frac{1}{t^3}dt - 2t^2\frac{1}{t}\frac{1}{t^2}dt = -\int_1^{\frac{1}{3}} (\frac{1}{t^2} + 2\frac{1}{t})dt$$
$$= [\frac{1}{t} - 2\ln t]_1^{\frac{1}{3}} = \underline{2 + 2\ln 3}.$$

4. Vi skriver vektorn $(5,1)$ som en linjärkombination av $(2,1)$ och $(1,2)$. Från ekvationerna $2a+b = 5$ och $a+2b = 1$ följer att $a = 3$ och $b = -1$. Eftersom T är linjär, gäller

$$T(5,1) = T(3(2,1)-(1,2)) = 3T(2,1) - T(1,2) = 3(3,2) - (4,-1) = \underline{(5,7)}.$$

5. Flödet ut genom en yta S är enligt divergenssatsen $\iiint_S \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$. Nu är $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$, vilket ger
$\iiint_S 6xyz\,dx\,dy\,dz = 6(\int_0^1 x\,dx)(\int_0^1 y\,dy)(\int_0^3 zdz) = \underline{27}$.

6. Låt $F(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$. Jacobimatrisen av F är $\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$ och $f = g \circ F$. Enligt kedjeregeln $D_1 f = e^{x+y}D_1 g + e^{x-y}D_2 g$ och $D_{12}f = e^{x+y}D_1 g + e^{x+y}(e^{x+y}D_{11}g - e^{x-y}D_{12}g) - e^{x-y}D_2 g + e^{x-y}(e^{x+y}D_{21}g - e^{x-y}D_{22}g)$. Eftersom $D_{12}g = D_{21}g$, får vi $\underline{D_{12}f = e^{x+y}D_1 g - e^{x-y}D_2 g + e^{2(x+y)}D_{11}g - e^{2(x-y)}D_{22}g}$.

7. En punkt (x, y) är en kritisk punkt om $D_1f(x, y) = 0$ och $D_2f(x, y) = 0$, dvs. $-\sin x = 0$ och $-\sin y = 0$. De kritiska punkterna i cirkelskivan $x^2 + y^2 < 16$ är de fem punktena $(0, 0)$, $\pm(\pi, 0)$ och $\pm(0, \pi)$. I en godtycklig punkt (x, y) är $AC - B^2 = \cos x \cos y$.

1) I origo är $AC - B^2 = 1$ och $A = -\cos 0 = -1 < 0$. Origo är således en lokal <u>maximipunkt</u>.

2) I de andra punkterna är $AC - B^2 = -1 < 0$. De är <u>sadelpunkter</u>.

8. Ytan S har ekvationen $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = 1 - x - y$. Eftersom $D_1f(x, y) = D_2f(x, y) = -1$, är ytelementet $dS = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dxdy = \sqrt{3}\, dxdy$ och

$$\iint_S e^{x+y}\, dS = \sqrt{3} \int_0^1 (\int_0^1 e^{x+y} dx) dy = \sqrt{3} \int_0^1 [e^{x+y}]_{x=0}^1 dy$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 (e^{y+1} - e^y) dy = \sqrt{3}(e - 1) \int_0^1 e^y dy = \underline{\sqrt{3}(e - 1)^2}.$$

9. Volymen $V = \iint_A (2 - x - y)\, dx\, dy$ där $A : x^2 + y^2 \leq 1$ är kroppens projektion på xy-planet. Vi får $V = 2$ arean av $A - \iint_A (x + y)\, dx\, dy = 2\pi - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta = \underline{2\pi}$.

10. a) Vi bestämmer A:s egenvärden och egenvektorer.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 19 - \lambda & 18 \\ -27 & -26 - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 18 \\ -1 + \lambda & -26 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 18 \\ 0 & -8 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 8)(\lambda - 1).$$

Egenvärden är 1 och -8. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(A - \lambda I)X = 0$. För $\lambda = 1$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 18 & 18 \\ -27 & -27 \end{pmatrix}$.

Lösningarna är $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ $t \neq \bar{0}$. För $\lambda = -8$ fås egenvektorerna $X = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ $t \neq \bar{0}$. Matrisen $\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$ är inverterbar och

$\underline{P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}}.$

b) Eftersom $D = D_0^3$ där $D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, får vi $A = PDP^{-1} = PD_0^3P^{-1} = (PD_0P^{-1})^3$. Matrisen $B = PD_0P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$$

uppfyller ekvationen $B^3 = A$.

11. På ellipsen är $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + y = 4 - 4y^2 + 3y^2 + y = 4 + y - y^2 = g(y)$. Ellipsens halvaxlar är 2 och 1. I vårt fall är $0 \le y \le 1$. Funktionen f antar på halvellipsen samma värden som g antar på intervallet $[0,1]$. Eftersom $g'(y) = 0$ om $y = \frac{1}{2}$, jämför vi värden $g(\frac{1}{2}) = 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $g(0) = 4$ och $g(1) = 4$. Största värdet av g på intervallet $[0,1]$ är $\frac{17}{4}$ och minsta värdet är 4. Eftersom g är kontinuerlig på det slutna intervallet antar den alla värden på $\underline{[4, \frac{17}{4}]}$.

12. a) Antag att $\mathbf{F} =$ grad u. Eftersom $D_1u = y^2 + 2xz$, så är $u(x,y,z) = y^2x + x^2y + g(y,z)$ för någon funktion g. Vidare är $D_2u = z^2 + 2xy = 2yx + D_1g$. Vi får att $g = z^2y + h(z)$ för någon funktion h. Nu är $D_3u = x^2 + 2yz = x^2 + 2yz + h'(z)$. Vi kan skriva att h(z) = C. Funktionerna $u(x,y,z) = y^2x + x^2y + z^2y + C$ där C är en godtycklig konstant är potentialfunktioner till $\mathbf{F}$.

b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = u(0,1,1) - u(0,0,0) = 1$.

13. På grund av symmetrin är $I = \iiint_K (x^2 + x^2 - y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K x^2\,dx\,dy\,dz$, där K är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Med hjälp av sfäriska koordinater ($x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$) får vi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} (\int_0^1 \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta \rho^2 \sin\phi\, d\rho)\, d\phi)\, d\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \int_0^{\pi} (1-\cos^2\phi)\sin\phi\, d\phi \int_0^1 \rho^4\, d\rho \\ &= [\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}]_0^{2\pi} [-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}]_0^{\pi} [\frac{\rho^5}{5}]_0^1 = \underline{\frac{4\pi}{15}}. \end{aligned}$$