Lösningar till tentamen den 17 december 2003
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Kvadratkomplettering ger $(z-2i)^2 = -4-6i+(2i)^2$. Låt $z-2i = a+bi$. Då är $(a+bi)^2 = -8-6i$ dvs. $a^2-b^2 = -8$ och $2ab = -6$. Vi sätter in $b = -3a^{-1}$ i den första ekvationen och får $a^4+8a^2-9 = 0$. Vidare är $a^2 = -4 \pm 5$ som ger $a = \pm 1$. Vi får nu $z-2i = \pm(1-3i)$.

Svar: $\underline{z = 1-i}$ och $\underline{z = -1+5i}$.

2. Låt $F(x,y,z) = x+y+z+e^{xyz}+3$. Gradienten av F är en normalvektor till ytan $F(x,y,z) = 0$. Vi får grad$F(x,y,z) = (1+yze^{xyz}, 1+xze^{xyz}, 1+xye^{xyz})$ och grad$F(1,0,-5) = (1,-4,1)$. Svar: $\underline{\pm\frac{(1,-4,1)}{3\sqrt{2}}}$.

3. I polära koordinater är $\iint_D \frac{1}{a+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}(\int_0^a \frac{r}{a+r}\,dr)d\theta = 2\pi\int_0^a(1-\frac{a}{a+r})dr = 2\pi[r - a\ln|a+r|]_{r=0}^a = 2\pi(a - a\ln(2a) + a\ln(a)) = \underline{2\pi(1-\ln 2)a}$.

4. Vi bestämmer först de kritiska punkterna till $f(x,y) = x^2+xy+y^2$. De partiella derivatorna är $D_1f(x,y) = 2x+y$ och $D_2f(x,y) = x+2y$. Ekvationerna $2x+y = 0$ och $x+2y = 0$ ger den kritiska punkten $(0,0)$.

På randen $x^2+y^2 = 1$ använder vi polära koordinater: $x = \cos\theta, y = \sin\theta$. Vi får $f(x,y) = g(\theta) = 1+\cos\theta\sin\theta = 1+2^{-1}\sin(2\theta)$. Ekvationen $g'(\theta) = \cos(2\theta) = 0$ ger g :s kritiska punkter $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Eftersom $g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5\pi}{4}) = \frac{3}{2}$, $g(\frac{3\pi}{4}) = g(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ och $g(0) = g(2\pi) = 1$ är g:s största resp. minsta värde på intervallet $[0,2\pi]$ $\frac{3}{2}$ resp. $\frac{1}{2}$.

Genom att jämföra värden $\frac{3}{2} = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\frac{1}{2} = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ och $f(0,0) = 0$, får vi att det största resp. minsta värdet av f är $\underline{\frac{3}{2} \text{ resp. } 0}$.

5. Vi söker en potential u till vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, x^2+z^2e^y, 2ze^y)$. Antag att $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$. Eftersom då $D_1u = 2xy$, så är $u(x,y,z) = x^2y+g(y,z)$ för någon funktion g. Vidare är $D_2u = x^2+D_1g(y,z) = x^2+z^2e^y$. Vi får att $g(y,z) = z^2e^y+h(z)$ för någon funktion h. Nu är $D_3u = 2ze^y+h'(z) = 2ze^y$. Vi får att $h(z)$ är en konstant. Vektorfältet är konservativt; en potentialfunktion är $u(x,y,z) = x^2y+z^2e^y$. Integralen $\int_C 2xy\,dx+(x^2+z^2e^y)\,dy+2ze^y\,dz = u(e,0,e)-u(0,0,1) = \underline{e^2-1}$.

6. Låt $x = s$ och $z = t$. Då är $y = 2s + 3t$ .Vi får $(x, y, z) = (s, 2s + 3t, t) = s(1, 2, 0) + t(0, 3, 1)$. Varje vektor i vektorrummet kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1, 2, 0)$ och $(0, 3, 1)$ som är linjärt oberoende och uppfyller ekvationen. Svar: En bas är $\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}$.

7. Låt $G(x, y) = (x+g(x-y), x)$. Då är $\phi = h \circ G$ och enligt kedjeregeln $(D_1\phi \quad D_2\phi) = (D_1h \quad D_2h)\begin{pmatrix} 1 + g'(x-y) & -g'(x-y) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vi får att $D_1\phi + D_2\phi = (1 + g'(x-y)D_1h + D_2h - g'(x-y)D_1h = D_1h + D_2h = 0$ enligt antagandet.

8. I tetraedern gäller $0 \le z \le 1 - x - y$. Dess projektion i xy-planet är triangeln T: $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$. Vi får

$$\iiint_K e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \iint_T \Big(\int_0^{1-x-y} e^{x+y+z}\,dz\Big)\,dx\,dy =$$
$$\iint_T ([e^{x+y+z}]_{z=0}^{1-x-y})\,dx\,dy = \iint_T (e - e^{x+y})\,dx\,dy =$$
$$e \cdot \text{arean av } T - \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} e^{x+y}\,dy\Big)dx = \frac{e}{2} - \int_0^1 (e - e^x)\,dx = \underline{\frac{e-2}{2}}$$

9. De partiella derivatorna av $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ är $D_1f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}$ och $D_2f(x, y) = y^{\frac{1}{2}}$. Vi får att $dS = \sqrt{1 + (D_1f(x, y))^2 + (D_2f(x, y))^2} = \sqrt{1 + x + y}$. Arean av ytan $z = f(x, y)$ är $\iint_Q \sqrt{1 + x + y}\,dx\,dy$ där Q är bottenkvadraten. Vi får att arean $= \frac{2}{3}\int_0^1 [(1 + x + y)^{\frac{3}{2}}]_{x=0}^1\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 ((2 + y)^{\frac{3}{2}} - (1 + y)^{\frac{3}{2}})\,dy = \frac{4}{15}[(2 + y)^{\frac{5}{2}} - (1 + y)^{\frac{5}{2}}]_{y=0}^1 = \underline{\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)}$.

10. a) Vi bestämmer A:s egenvärden och egenvektorer.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -7-\lambda & 24 \\ 24 & 7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 49 - 24^2 = \lambda^2 - 625.$$

Egenvärden är ± 25. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(A \pm 25I)X = 0$. För $\lambda = 25$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix}$.

Lösningarna är $X = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ $t \ne \bar{0}$. För $\lambda = -25$ fås egenvektorerna $X = t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ $t \ne \bar{0}$. Matrisen $\underline{P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$ är ortogonal och

$$P^T AP = \underline{D = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}}.$$

b) För $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gäller $Av = 25v$. Vidare är

$$A^9 v = A^8(Av) = 25A^8 v = 25^2 A^7 v = ... = 25^9 v.$$

På samma sätt är, om $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A^9 u = -25u$.

Svar: A^9 har egenvärden $\pm 25^9$ (och samma egenvektorer som A).

11. En normal till planet är $(1, -1, 2)$. En normal till ytan i en punkt (x, y, z) är $(8x, 8y, -2z) = 2(4x, 4y, -z)$ (förutom i origo där ytan, en dubbelkon, har ingen tangentplan eller normal). Villkoret för att ytans tangentplan är parallellt med planet är att normalerna är parallella dvs. $(4x, 4y, -z) = t(1, -1, 2)$ för något tal $t \neq 0$. Vi får $4x = t, 4y = -t$ och $-z = 2t$. Eftersom $(x, y, z) = (t/4, -t/4, -2t)$ är en punkt på ytan, gäller att $4t^2 = 4(t^2/16 + t^2/16)$. Endast $t = 0$ uppfyller ekvationen.

Svar: Inga punkter på ytan uppfyller villkoret.

12. Se Adams s. 968.

13. a) Om $a \geq -1$, $x^4 + 2ax^2y^2 + y^4 \geq (x^2 - y^2)^2 \geq 0 = f(0, 0)$. Funktionen f har i origo en (lokal) minimipunkt.

b) Om $a < -1$, $f(x, x) = (2a + 2)x^4 < 0$ och $f(x, 0) = x^4 > 0$ för små värden av $|x|$ $(x \neq 0)$. Origo är en sadelpunkt.