Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Onsdagen den 17 december 2003, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Lös ekvationen $z^2 - 4iz + 4 + 6i = 0$. (4p)

2. Bestäm två normalvektorer med längden $= 1$ till ytan $e^{xyz} + z = -3 - x - y$ i punkten $(1, 0, -5)$. (4p)

3. Beräkna $\iint_D (a + \sqrt{x^2 + y^2}))^{-1}\, dxdy$ där D är cirkelskivan $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ och a är en konstant, $a > 0$. (4p)

4. Bestäm största och minsta värdet som funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ antar i området $x^2 + y^2 \leq 1$. (4p)

5. Beräkna linjeintegralen $\int_C 2xy\, dx + (x^2 + z^2 e^y)\, dy + 2ze^y\, dz$ där C är kurvan $x = t^5 e^t, y = \sin(\pi t^3), z = e^t$ och t ändras från 0 till 1. (4p)

6. Bestäm en bas för vektorrummet $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$. (4p)

7. Antag att funktionen $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator och att den uppfyller ekvationen $D_1 h(x, y) + D_2 h(x, y) = 0$ i alla punkter (x, y). En funktion ϕ definieras genom $\phi(x, y) = h(x + g(x - y), x)$ där $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är en deriverbar funktion. Visa att $D_1\phi(x, y) + D_2\phi(x, y) = 0$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. (5p)

8. Beräkna $\iint_K e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz$ där K är tetraedern som begränsas av planen $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. (6p)

v.g. vänd

9. Bestäm arean av ytan $z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. (6p)

10. a) Bestäm en ortogonalmatris P och en diagonalmatris D så att $P^T AP = D$, där A är matrisen $A = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$. (4p)

b) Vilka är egenvärden av matrisen A^9 ?
(A är samma matris som i a)). (2p)

11. Undersök om det finns punkter på ytan $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ där ytans tangentplan är parallellt med planet $x - y + 2z = 1$ och bestäm dessa i förekommande fall. (6p)

12. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, när $\mathbf{F}(x, y, z) = (axy^2, ax^2y, (x^2 + y^2)z^2)$ och S är den slutna yta som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 \leq 3$ och planen $z = 0$ och $z = a$ (a är en positiv konstant). (6p)

13. Undersök om origo en lokal maximum, lokal minimum eller en sadelpunkt till funktionen $f(x, y) = x^4 + 2ax^2y^2 + y^4$, där a är en konstant

a) om $a \geq -1$.

b) om $a < -1$. (7p)