Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik 2, 5B1116, för B och Öppen Ingång

(Även öppen för E, ME, Media och I.)
torsdagen den 6/3 2003 kl. 14.00 - 19.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16 , 22, respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 9 \\ x + 3y + z &= 11 \\ x + y + 3z &= 15 \end{aligned} \qquad (3p)$$

2. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x - 3y - 6$$

samt ange deras karaktär. (3p)

3. Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3p)$$

4. Bestäm $u_{xx} + u_{yy}$, då $u(x, y) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. (3p)

5. Transformera andragradskurvan

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5 \qquad (*)$$

till huvudaxelform och ange kurvans typ. Bestäm huvudaxlarnas riktningar för kurvan $(*)$ samt skissera kurvan i xy-planet. (3p)

V.g. vänd!

6. Ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ 2xy + 3yz + xz &= 6 \end{aligned}$$

har en lösningskurva som går genom punkten $(1, 1, 1)$.
Avgör om denna kurva kan utgöra grafen för en funktion av typ
$y = y(x),\ z = z(x)$ i en omgivning av punkten $(1, 1, 1)$. (4p)

7a. Bestäm skärningspunkten mellan linjerna

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{q}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ (2p)

b. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller de båda linjerna. (2p)

8. Bestäm volymen av det största rätblock (med axelparallella sidor) som kan skrivas in i ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$ (4p)

9. Låt funktionen g vara definierad i R^2 genom

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} + 1, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Visa att $\frac{\partial g}{\partial x}$ och $\frac{\partial g}{\partial y}$ existerar överallt i R^2, men att g inte är kontinuerlig i R^2. (4p)

10. Låt A, B, R, S och Λ vara $n \times n$-matriser. Vi definierar

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}, \quad \text{där } a_{jj} \text{ är } A\text{:s diagonalelement.}$$

a. Visa att $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. (1p)

b. Visa att $\operatorname{tr}(R\Lambda R^{-1}) = \operatorname{tr}(\Lambda)$. (1p)

c. Visa att varje *symmetrisk* 3×3-*matris* A uppfyller

$$A^3 = (\det A)E + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A^2) - (\operatorname{tr}(A))^2)A + \operatorname{tr}(A)A^2,$$

där E är enhetsmatrisen av ordning 3×3.
Ledning: Använd **a.** i **b.** och **b.** i **c.** (2p)

V.g. vänd!