Institutionen för matematik
KTH

Tentamenskrivning 2003-01-08, kl. 08-13.00

5B1117 matematik III, för E och T

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Hjälpmedel: medföljande förmelblad i matematik III.
Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Bestäm konvergensmängden till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n+1}$. (3p)

Lösning:

Vi kan skriva att $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ och använda t ex kvotkriteriet

om $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$ så konvergerar serien absolut då $r<1$.detta ger

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3x+1)^{n+1}}{(n+2)}}{\frac{(3x+1)^n}{(n+1)}}\right|=|3x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=|3x+1|.$$ Serien konvergerar absolut om

$|3x+1|<1 \Leftrightarrow -2/3<x<0$.

Vi kollar ändpunkterna

a) Sätt in $x=-2/3$ i serien och får $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ som konvergerar enligt Leibniz' konvergens kriteriet.

b) Sätt in $x=0$ i serien och får $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ som divergerar, ty harmonisk serien.

Svar: konvergensmängden $-2/3\le x<0$.

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x-y)\,dxdy$ över det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x+y=2,\ x+y=3,\ x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=4$. (3p)

Lösning:

Sätt $u=x^2-y^2,\ v=x+y$. Då motsvaras omrodet D av $D'=\{(u,v):1\le u\le 2\ ,2\le v\le 3\}$,

$$\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| = 2(x+y) = 2v \text{ ,vidare är } dxdy = \left\|\frac{d(x,y}{d(u,v)}\right\| dudv = \frac{1}{2v} dudv \text{ ,men } x - y = u/v \text{ så att}$$

$$\iint_D (x-y)dxdy = \iint_{D©} \frac{u}{v}\frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int_1^4 udu \int_2^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 \left[\frac{-1}{v}\right]_2^3 = \frac{5}{8}.$$

3. Beräkna arean av den buktiga ytan $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, där $x^2 + y^2 \leq 12$. (3p)

Lösning:

Se Petermanns bok sid. 229 Ex 9.24

4. I en vätska kan Newtons ekvation skrivas $\rho(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\nabla p(\mathbf{r})$, där $\rho(\mathbf{r})$är masstätheten, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ acceleration, $p(\mathbf{r})$ det lokala trycket och $\mathbf{r} = (x,y,z)$.

Bestäm den vinkeln som $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ bildar med rot($\mathbf{a}(\mathbf{r})$). (3p)

Lösning:

Vi har $\nabla \times (\rho \mathbf{a}) = -\nabla \times (\nabla p) = \mathbf{0}$. Utveckla vänstra ledet $\nabla \times (\rho \mathbf{a}) = \nabla \rho \times \mathbf{a} + \rho \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,som ger $\nabla \times \mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}(\nabla \times \mathbf{a})$. Vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\nabla \times \mathbf{a}$ ges av $(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{-1}{\rho}\right)(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$, vilket innebär att $\mathbf{a}$ är vinkelrät mot $\nabla \times \mathbf{a}$.

5. Beräkna cirkulationsintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$, då Γ är skärningskurvan mellan paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och $\mathbf{F} = \left(y^2 z e^x + x^2 y,\ 2yze^x + yz,\ y^2 e^x\right)$.

Kurvans projektion på $xy-$planet är positivt orienterad. (4p)

Lösning:

Projektionen γ på $xy-$planet av Γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Låt D vara området innanför γ.

På Γ är $z = 1 + y^2$. Då fås eftersom Γ är en sluten kurva

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_\Gamma \left(y^2 z e^x + x^2 y\right)dx + \left(2yze^x + yz\right)dy + y^2 e^x dz =$$

$$\oint_\Gamma d\left(y^2 z e^x\right) + \oint_\Gamma x^2 y dx + y\left(1 + y^2\right)dy = 0 + \oint_\Gamma x^2 y dx + y\left(1 + y^2\right)dy =$$

$$= \oint_\Gamma x^2 y dx + \oint_\Gamma \underbrace{y\left(1+y^2\right)dy}_{d\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y\right)} = \oint_\gamma x^2 y dx = 0 = [\text{Greensformel}] = -\iint_D x^2 dxdy = -\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= -\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi/4$$

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(xz^2 + e^z,\ 2x^2yz,\ y^2z^2 + 1\right)$

Över ytan $\left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$ med normalriktning uppåt. (4p)

Lösning:

Komplettera S med "botten" $S_1 = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ så att $S + S_1$ blir rand till halvklottet

$\Omega = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\right\}$. Använd Gauss´sats Använd

$\iint\limits_{S+S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \left(z^2 + 2x^2z + 2y^2z\right) dxdydz$, sfäriska koordinater ger

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta\, r\cos\theta\right) r^2 \sin\theta\, dr d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta + 2\pi \int_0^1 2r^5 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{5}\right)\left[\frac{-1}{3}\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2} + 2\pi\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12}\right) = 3\pi/10$$

7. Bestäm cirkulationsintegralen $\oint\limits_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$, där E är ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ som Genomlöpes i positiv led. Vektorfältet $\mathbf{F} = r\left(\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\right)$är uttryckt i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer. (4p)

Lösning:

Använd Stokes sats på den inneslutna ellipsen i $xy-$planet.

$\oint\limits_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint\limits_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$. Rotationen av vektorfältet $\mathbf{F}$ är

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(r^2\cos\theta\, \mathbf{e}_r - 2r^2\sin\theta\, \mathbf{e}_\theta + 2r^2 \sin\theta\, \mathbf{e}_\varphi\right) = \cot\theta\, \mathbf{e}_r - 2\mathbf{e}_\theta + 2\mathbf{e}_\varphi.$$

I $xy-$planet $(\theta = \pi/2)$ blir den första termen noll och vi får kvar

$\oint\limits_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 2\iint\limits_S \left(-\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\right) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, där S blir den elliptiska ytan i $xy-$planet med normalriktningen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Enhetsvektorn $\mathbf{e}_z$ är vinkelrät mot enhetsvektorn $\mathbf{e}_\varphi$,där $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$, medan $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_z$ i $xy-$planet dvs $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ Slutresultat blir därför

$$\oint\limits_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 2\iint\limits_S d\sigma = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

8. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases} x = u^2 + av^2 \\ y = 2uv \\ z = bu + cv + w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w). (2p)

Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A} = (x,y,3z)$. (2p)

Lösning:

Låt $\mathbf{r}(u,v,w)=\left(u^2+av^2,2uv,bu+cv+w\right)$, vi får

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=(2u,2v,b),\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(2av,2u,c),\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=(0,0,1)$.dessa vektorer blir ortogonala om

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=b=0\Rightarrow b=0,\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=c=0\Rightarrow c=0, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}=4auv+4uv=0\Rightarrow a=-1$.

Basvektorerna blir $\mathbf{e}_u=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right|=\frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$,pss $\mathbf{e}_v=\frac{(-v,u,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\mathbf{e}_v=(0,0,1)$.

Vi beräknar komponenterna av vektor $\mathbf{A}=(x,y,3z)=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)$ i den nya ON-basen och får att $A_u=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_u=\left(u^2-v^2,2uv,3w\right)\cdot\frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}=u\sqrt{u^2+v^2}$. På samma sätt fås

$Av=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_v=v\sqrt{u^2+v^2}$ och $A_w=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_w=3w$

Svar $a=-1,b=c=0,A_u=u\sqrt{u^2+v^2},A_u=v\sqrt{u^2+v^2},A_w=3w$

9. Låt f och g vara kontinuerligt deriverbara funktioner i rymden och sätt $\mathbf{F}=\nabla f$.
Bestäm $\mathbf{F}\cdot rot(g\mathbf{F})$. (4p)

Lösning:

Vi har $\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F})=\mathbf{F}\cdot(\nabla g\times\mathbf{F})+\mathbf{F}\cdot(g\nabla\times\mathbf{F})=\nabla g\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{F})+g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F}=$
$=\ g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F}$. Med $\mathbf{F}=\nabla f$ och $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$. Detta ger att
$\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F})=\mathbf{0}$.

10. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=\frac{(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$ ut ur ellipsoiden
$x^2+2y^2+3z^2=1$ (4p)

Lösning:

Utanför origo är $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$, ty med $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ har vi

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=\frac{r^3\cdot 1-x3r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}$ och motsvarande för y och z, så att

$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0$.

Låt S vara sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$ så att S ligger innanför ellipsoiden E: $x^2+2y^2+3z^2=1$. Om S har utåtriktad normal, så är E-S rand till området mellan E och S och Gauss'sats ger att $\iint_E\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$. På S är $\mathbf{n}=\frac{(x,y,z)}{a}$ så att

$$\iint_E\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_S\frac{(x,y,z)}{a^3}\cdot\frac{(x,y,z)}{a}d\sigma=\iint_S\frac{a^2}{a^4}d\sigma=\frac{1}{a^2}4\pi\,a^2=4\pi.$$