Institutionen för matematik
KTH

Tentamenskrivning 2003-01-08, kl. 08-13.00

5B1117 matematik III, för E och T

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Hjälpmedel: medföljande förmelblad i matematik III.
Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

1. Bestäm konvergensmängden till potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n+1}$. (3p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x-y)\,dxdy$ över det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x+y=2,\ x+y=3,\ x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=4$. (3p)

3. Beräkna arean av den buktiga ytan $z=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$, där $x^2+y^2\le 12$. (3p)

4. I en vätska kan Newtons ekvation skrivas $\rho(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r})=-\nabla p(\mathbf{r})$, där $\rho(\mathbf{r})$ är masstätheten, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ acceleration, $p(\mathbf{r})$ det lokala trycket och $\mathbf{r}=(x,y,z)$.
Bestäm den vinkeln som $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ bildar med rot($\mathbf{a}(\mathbf{r})$). (3p

5. Beräkna cirkulationsintegralen $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$, då Γ är skärningskurvan mellan paraboloiden $z=x^2+2y^2$ och cylindern $x^2+y^2=1$ och $\mathbf{F}=\left(y^2ze^x+x^2y,\ 2yze^x+yz,\ y^2e^x\right)$.
Kurvans projektion på $xy-$planet är positivt orienterad.
(4p)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=\left(xz^2+e^z,\ 2x^2yz,\ y^2z^2+1\right)$
Över ytan $\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0\right\}$ med normalriktning uppåt. (4p)

Vargod vänd

7. Bestäm cirkulationsintegralen $\oint_E \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr}$, där E är ellipsen $x^2+2y^2=1, z=0$ som Genomlöpes i positiv led. Vektorfältet $\mathbf{F}=r(\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\varphi)$ är uttryckt i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer. (4p)

8. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases} x=u^2+av^2 \\ y=2uv \\ z=bu+cv+w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w). (2p)
Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A}=(x,y,3z)$. (2p)

8. Låt f och g vara kontinuerligt deriverbara funktioner i rymden och sätt $\mathbf{F}=\nabla f$.
Bestäm $\mathbf{F}\cdot rot(g\mathbf{F})$. (4p)

10. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ut ur ellipsoiden

$x^2+2y^2+3z^2=1$. (4p)