Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2003-03-06, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för program T

.

1. Sätt $u = xy,\ v = \frac{y}{x^2}$. Då övergår D till $D' = \{(u,v): 1 \le u \le 2, 2 \le v \le 4\}$

den sökta arean blir $\iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\det\left(\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right)\right| dudv = \frac{1}{3}\int_2^4 dv \int_1^2 \frac{1}{u} du = \frac{2}{3}\ln 2$.

2. Inför polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Då övergår D till $D' = \{(r,\theta): 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2\}$

$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$\iint_{D'} \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^1 r\,dr \int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

3. Om vi låter $P = \frac{2x}{x^2+y} + 1$ och $Q = \frac{1}{x^2+y} + 1$ så får vi att

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$ och $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$. Alltså är differentialen $Pdx + Qdy$ exakt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo, ty där är derivatorna singulära. En ekvivalent utsaga är att fältet (P,Q) är konservativt i hela $\mathbf{R}^2$ utom i origo. Eftersom den givna kurvan inte omsluter origo kan vi utnyttja att det enligt satsen (10.3) om konservativa fält existerar en potential $U(x,y)$ till fältet (P,Q) så att $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ och $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Vi har alltså att

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P = \frac{2x}{x^2+y} + 1 & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{1}{x^2+y} + 1 & (2) \end{cases}$$

Integration av (1) med avseende på x ger

$$U = \int \left(\frac{2x}{x^2+y} + 1\right) dx = \ln\left(x^2+y\right) + x + \varphi(y) \quad (3)$$

där φ är någon kontinuerlig och deriverbar funktion av y.
Derivation av (3) med avseende på y samt jämförelse med (2) ger

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y} + \varphi'(y) = \{(2)\} = \frac{1}{x^2+y} + 1 \Rightarrow \varphi' = 1 \Rightarrow \varphi = y + C$$

Potentialen till (P,Q) är alltså $U = \ln(x^2+y) + x + y + C$ och den sökta integralen kan nu beräknas enligt

$$\int_\gamma \left(\frac{2x}{x^2+y} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x^2+y} + 1\right) dy = U(1,0) - U(-1,0) =$$

$$= \ln 1 + 1 + 0 - \ln 1 + 1 + 0 = 2$$

4. Σ: $z = 12 - 3x^2 - 3y^2$, $z \geq 0$. Ytans normalvektor $(-z'_x, -z'_y, 1) = (6x, 6y, 1)$ har samma riktning som $\hat{n}$. Ytans projektion $\mathbf{D}$ på xy–planet ges av $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\iint_\Sigma (-2y, x, 6xy + 2) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_\mathbf{D} (-2y, x, 6xy + 2) \cdot (6x, 6y, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_\mathbf{D} (-12xy + 6xy + 6xy + 2)\, dx\, dy = 2 \iint_\mathbf{D} dx\, dy = 2 \cdot \text{arean av } \mathbf{D} = 2 \cdot 4\pi = 8\pi.$$

5. Vi har $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \times \nabla(-p) = \mathbf{0}$. Utveckla vänstra ledet $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla\varphi \times \mathbf{a} + \varphi \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, som ger $\nabla \times \mathbf{a} = -\frac{1}{\varphi}(\nabla\varphi \times \mathbf{a})$. Vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\nabla \times \mathbf{a}$ ges av $(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = \left(-\frac{1}{\varphi}\right)(\nabla\varphi \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$, vilket innebär att $\mathbf{a}$ är vinkelrät mot $\nabla \times \mathbf{a}$.

6. Låt $\mathbf{r}(u,v,w) = \left(u^2 + av^2, 2uv, bu + cv + w\right)$, vi får

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v, b), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2av, 2u, c), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (0,0,1).$$ dessa vektorer blir ortogonala om

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = b = 0 \Rightarrow b = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = c = 0 \Rightarrow c = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = 4auv + 4uv = 0 \Rightarrow a = -1.$$

Basvektorerna blir $\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Big/ \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = \frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$, pss $\mathbf{e}_v = \frac{(-v,u,0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $\mathbf{e}_v = (0,0,1)$.

Vi beräknar komponenterna av vektor $\mathbf{A} = (x, y, 3z) = \left(u^2 - v^2, 2uv, 3w\right)$ i den nya ON-basen och får att $A_u = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_u = \left(u^2 - v^2, 2uv, 3w\right) \cdot \frac{(u,v,0)}{\sqrt{u^2+v^2}} = u\sqrt{u^2+v^2}$, Pss fås

$Av = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_v = v\sqrt{u^2+v^2}$ och $A_w = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_w = 3w$

Svar: $a=-1, b=c=0, A_u = u\sqrt{u^2+v^2}, A_u = v\sqrt{u^2+v^2}, A_w = 3w$

7. Se Ex 11.27 sid 355.

8. $div(\mathbf{F}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{n+1} = (n+1)\rho^{n-1}$,

$$grad\big(div(\mathbf{F})\big) = \frac{\partial}{\partial\rho}\big((n+1)\rho^{n-1}\big)\mathbf{e}_\rho = (n+1)(n-1)\rho^{n-2}\mathbf{e}_\rho .$$

$rot(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$. Detta ger att $grad\big(div(\mathbf{F})\big) - rot\big(rot(\mathbf{F})\big) = \mathbf{0}$ om $n = \pm 1$.

9. Inför sfäriska koordinater $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\cos\theta$ övergår Ω till $\Omega' = \{(r,\theta,\varphi): 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Massan blir

$$\iiint_\Omega \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{r^5} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_1^2 \frac{1}{r}dr \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \ln 2 \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \pi\ln 2\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = [u=\cos\theta, du = -\sin$$

$$= \pi\ln 2 \int_1^{-1}(1-u^2)(-du) = 2\pi\ln 2$$

Svar: $2\pi\ln 2$

10. Begränsningsytan S .är sluten. Divergenssatsen ger att $\oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_\Omega div(\mathbf{F})dxdydz$. $div(\mathbf{F}) = \nabla\cdot\mathbf{F} = 2z$. I sfäriska koordinater övergår Ω till $\Omega' = \{(r,\theta,\varphi): 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

$$\iiint_\Omega 2z\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} 2r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = 2\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi =$$

$$= 2\frac{1}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

11. Vektorfältets rotation i sfäriska koordinater ges av

$$\nabla \times F = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 2r\cos 2\theta - \cos\theta & -(2r\sin 2\theta - \sin\theta) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-2r^2 \sin(2\theta) + r\sin(\theta)\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(2r\cos(2\theta) - \cos(\theta)\right)\right]\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{0}$$

Det är alltså virvelfritt överallt, och har en potential $\Phi(r,\theta,\varphi)$, som uppfyller

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2r\cos(2\theta) + \cos(\theta) \Rightarrow \Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + f(\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 2r\sin(2\theta) - \sin(\theta) \Rightarrow \Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + g(r,\varphi) \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \Phi = h(r,\theta) \end{cases}$$

För att alla dessa tre ekvationer skall vara uppfyllda samtidigt, så måste Φ ha formen $\Phi = -r^2\cos(2\theta) + r\cos(\theta) + C$, där C är en konstant.
Integralen blir alltså:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{r=0}^{(r=2,\theta=\pi/2,\varphi=0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(2,\pi/2,0) - \Phi(0,0,0) = 4$$

12. Vi har $\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot(\nabla g\times\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot(g\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla g\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{F}) + g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F} =$
$= g\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F}$. Med $\mathbf{F} = \nabla f$ och $\nabla\times\nabla f = \mathbf{0}$. Detta ger att
$\mathbf{F}\cdot(\nabla\times g\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.

13. se kursboken sid 300-301.