Institutionen för Matematik, KTH
Avd Matematik

<u>Tentamensskrivning, 2003-03-06, kl. 08.00-13.00</u>
<u>5B1117, matematik III för program T</u>

Om du är godkänd så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.
Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 16. Se del A nedan.
Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 27 och 32 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig och tydlig lösning.
Hjälpmedel: Medföljande formelblad.
Lösningsförslag finns efter skrivningstidens slut på kurshemsidan.

Del A, 3 poängsuppgifter.

Den som blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \le X \le 7$, hoppar över motsvarade uppgifter nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna arean av det område D som begränsas av kurvorna $xy = 1, xy = 2$ och $y = 2x^2, y = 4x^2$.

2. Beräkna integralen $\iint_D \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,dxdy$, där $D = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}$

3. Beräkna $\int_\gamma \left(\frac{2x}{x^2 + y} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x^2 + y} + 1\right)dy$ då γ ges av halvcirkeln $x^2 + y^2 = 1, y \ge 0$ genomlupen från $(-1,0)$ till $(1,0)$.

4. Bestäm flödesintegralen $\iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$ då $\mathbf{F} = (-2y, x, 6xy + 2)$ och Σ är den del av ytan $z = 12 - 3x^2 - 3y^2$ där $z \ge 0$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ har positiv $z-$komponent.

5. I en vätska kan Newtons ekvation skrivas $\rho(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\nabla p(\mathbf{r})$, där $\rho(\mathbf{r})$ är masstätheten, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ acceleration, $p(\mathbf{r})$ det lokala trycket och $\mathbf{r} = (x,y,z)$. Bestäm den vinkel som $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ bildar med rot($\mathbf{a}(\mathbf{r})$).

Var god vänd

6. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases} x = u^2 + av^2 \\ y = 2uv \\ z = bu + cv + w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w).
Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A} = (x,y,3z)$.

7. Beräkna för kurvan γ: $\mathbf{r}(t) = \left(t^2\cos 2t, t^2 \sin 2t, t^2\right), \sqrt{2} \le t \le \sqrt{7}$, som betraktas som en homogen tråd, $z-$komponenten för dess tyngdpunkt, d.v.s. $\int_\gamma z\,ds \,/ \int_\gamma ds$.

8. För vilka värden på exponenten n satisfierar vektorfältet $\mathbf{F} = \rho^n \mathbf{e}_\varphi$ ekvationen $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{F})) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = \mathbf{0}$.

Del B, 4 poängsuppgifter.

9. Beräkna massan av kroppen $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ med densiteten $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$.

10. Låt $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \text{och } z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ och låt S vara begränsningsytan till K. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(zy^4, x^3, z^2\right)$ ut genom S.

11. Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater,
$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = (2r\cos 2\theta - \cos\varphi)\mathbf{e}_r - (2r\sin 2\theta - \sin\varphi)\mathbf{e}_\theta$.
Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är en reguljär kurva i rymden med startpunkt i origo och slutpunkt $r = 2,\ \theta = \pi/2,\ \varphi = 0$.

12. Låt f och g vara kontinuerligt deriverbara funktioner i rymden och sätt $\mathbf{F} = \nabla f$.
Bestäm $\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}(g\mathbf{F})$.

13. Formulera Gauss sats och bevisa denna då kroppen $V = \{(x,y,z) : g(x,y) < z < f(x,y)\}$ och vektorfältet $\mathbf{F} = R(x,y,z)\mathbf{e}_z$, där $R(x,y,z)$ är kontinuerligt deriverbar.