Institutionen för Matematik , KTH
Avd Matematik

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2003-05-27 kl. 08.00 - 13.00, 5B1117 Matematik III för E1, Open1 och ME1

1. Konvergenscentrum fås där täljaren blir noll, dvs då $x = 0$.

   Sätt $a_n = \frac{n^3}{2^n}$. Konvergensradien R kan bestämmas ur sambandet
   $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^3 \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1/2$, dvs $R = 2$.

   Intervallets ändpunkter undersöks explicit:

   $x = -2$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(-2)^n}{2^n}$ vilken divergerar eftersom termerna inte går mot noll.

   $x = 2$ ger serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(2)^n}{2^n}$ vilken också divergerar, av samma anledning.

2. I z-led har vi två begränsningsytor $z = z(x, y)$, nämligen $z = 0$ och $z = xy$. Dessa ytor skär varandra för $x = 0$ och $y = 0$. De fyra "fickor" som bildas mellan dessa två ytor för de respektive kvadranterna i xy-planet är alla obegränsade med oändlig volym. En ändlig kropp kan fås om ett område begränsas utåt av ytterligare villkor. Planet $y = x$ delar "fickorna" i första och tredje kvadranterna i vardera två lika delar, men delarna är forfarande obegränsade. Planet $x = 1$ delar en av de "halva fickorna" i första kvadranten i en begränsad del och en obegränsad. Alla andra delar är fortfarande obegränsade.

   Ovanstående resonemang ger att volymen som skall beräknas kännetecknas av att $0 \le z \le xy$, $0 \le y \le x$ och $0 \le x \le 1$.

   Volymen V blir

   $$V = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{xy} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \frac{x^3}{2}\, \mathrm{d}x = 1/8$$

3. **a**) Parametrisera med vinkeln φ i polära koordinater. Använd $\begin{cases} x = a\,\cos\varphi \\ y = b\,\sin\varphi \end{cases}$, där φ går från 0 till 2π. Då fås $\mathrm{d}y = b\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, och

   $$\int_{\partial E} x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (a\,\cos\varphi)\,(b\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) = ab\int_{0}^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi ab.$$

   b) Greens sats ger

   $$\int_{\partial E} x\,\mathrm{d}y = \iint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \{\text{arean av } E\} = \pi ab.$$

4. Parametriseringen ger $\boldsymbol{r}(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv, u)$, vilket ger $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (2u, 2v, u)$ och $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-2v, 2u, 0)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2u & 2v & 1 \\ -2v & 2u & 0 \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 4(u^2+v^2))$$

z-komponenten $4(u^2+v^2)$ är alltid positiv, d.v.s minustecknet skall väljas framför integralen för att normalen skall bli rätt riktad.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ blir $\boldsymbol{F}(u,v) = (2uv, -u, 1)$

Allt detta insatt i integralen ger

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = -\iint_{S'} (2uv, -u, 1) \cdot (-2u, -2v, 4(u^2+v^2))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v =$$

$$= -\int_{u=0}^{2} \int_{v=0}^{4} (-4u^2 v + 2uv + 4(u^2+v^2))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \ldots = -96$$

5. Använd nablaräkning:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \{\boldsymbol{\omega} \text{ är konstant}\} = \nabla_r \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla_r \cdot \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_r)\boldsymbol{r} =$$

$$= \boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z) - (\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z})(x,y,z) = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$$

6. Den skalära potentialen U bestäms ur vektorekvationen

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U = \{\text{sfäriska koordinater}\} = \frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Detta ger tre ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial r} = A_r = \sin\theta & (1) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = A_\theta = \cos\theta & (2) \\ \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = A_\varphi = -\dfrac{\sin\varphi}{r \sin\theta} & (3) \end{cases}$$

Integration av ekv (1) med avseende på r ger

$$U(r,\theta,\varphi) = r \sin\theta + f(\theta,\varphi), \qquad (4)$$

där f är en godtycklig funktion av θ och φ.

Insättning av (4) i (2) ger $\dfrac{1}{r}(r \cos\theta + \dfrac{\partial}{\partial\theta}f(\theta,\varphi)) = \cos\theta$, d.v.s. $\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(\theta,\varphi) = 0$.
Integration av detta m.a.p. θ ger $f(\theta,\varphi) = g(\varphi)$, d.v.s. f beror inte på θ utan bara på φ.
Detta sätts in i (4) och ger

$$U(r,\theta,\varphi) = r \sin\theta + g(\varphi), \qquad (5)$$

Insättning av (5) i (3) ger nu $\dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}g(\varphi) = -\dfrac{\sin\varphi}{r \sin\theta}$, d.v.s $g(\varphi) = \cos\varphi + C$, där C är en konstant. Eftersom vi bara söker en potential kan vi välja $C = 0$, och vi får

$$U(r,\theta,\varphi) = r \sin\theta + \cos\varphi,$$

som alltså är en skalär potential till $\boldsymbol{A}$.

7. Vi använder en variant av Gauss' sats och får

$$-\iint_{\partial B} p\,\hat{\mathbf{n}} d\sigma = -\iiint_B \operatorname{grad} p\, dV$$

$$-\iiint_B (0,0,-1)\, dV = (0,0,|B|) = (0,0,\frac{4\pi}{3}\cdot 3^3) = 36\pi\,\hat{\mathbf{e}}_z.$$

8. De rätta alternativen är, uppräknade i ordning: 1), 3), 2), 3), 1), 1), 1), 2), 3).

9. a) Om L är en sluten kurva som ej omsluter z-axeln så kan man hitta ett enkelt sammanhängande område som innehåller kurvan och som inte skär z-axeln. I detta område kan man lägga en (orienterad) yta S vars rand är L. (Dessa intuitiva påståenden är egentligen inte självklara och det är ganska svårt att skriva ned rigorösa bevis.)

   Stokes' sats ger nu

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}} d\sigma.$$

   Beräkning av rot $\mathbf{A}$ i cylinderkoordinater ger

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}[0\cdot\hat{\mathbf{e}}_\rho + 0\cdot\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\frac{\sin\varphi}{\rho^2}) - (\frac{\partial}{\partial\varphi}(\frac{\cos\varphi}{\rho^2}))\,\hat{\mathbf{e}}_z\,]$$

$$= (-\frac{\sin\varphi}{\rho^2} + \frac{\sin\varphi}{\rho^2})\frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{\rho} = 0.$$

   Alltså följer att

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

   b) Välj först en standardkurva L_0 som omsluter z-axeln, t.ex. cirkeln $\rho = 1$, $z = 0$, med φ växande från 0 till 2π. För denna fås (emedan $d\mathbf{r} = 1\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi\cdot d\varphi + 0 + 0$ längs L_0 och basvektorerna bildar ett ortonormerat system)

$$\oint_{L_0} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{L_0} (\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi)\cdot\hat{\mathbf{e}}_\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

   Låt nu L vara en godtycklig kurva som omsluter z-axeln på samma sätt som L_0 (ett varv i positiv led). Då kan L deformeras kontinuerligt till L_0 utan att skära z-axeln, och under denna deformation genomsveps en yta S vars rand består av L och L_0. Med hänsyn tagen till orienteringar och med användande av Stokes' sats igen fås

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}} d\sigma + \oint_{L_0} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{L_0} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

   Liknande resonemang kan genomföras om L går flera varv runt z-axeln eller går åt andra hållet osv.

   En alternativ metod att lösa problemet är att hitta en potential till $\mathbf{A}$. I cylinderkoordinater fås en sådan ur

$$\frac{\partial U}{\partial\rho} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

   Detta ger

$$U = -\frac{\cos\varphi}{\rho} + C.$$

   Eftersom denna är väldefinierad utanför z-axeln så följer omedelbart att $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$. (Om man väljer en punkt $\mathbf{a}\in L$ och tänker sig att L går från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{a}$ så fås $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{a}) = 0$.)

10. Integralen är divergent, se Exempel 9.15 a), sid 236 i läroboken.

11. Vi har

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{B}) = (\operatorname{grad}\Phi)\cdot\mathbf{B} + \Phi\operatorname{div}\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

varför Gauss' sats (två gånger) ger

$$\iiint_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,dxdydz = \iiint_V \operatorname{div}(\Phi\mathbf{B})\,dxdydz$$

$$= \iint_{\partial V}\Phi\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \Phi_0\iint_{\partial V}\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \Phi_0\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{B}\,dxdydz = 0.$$

12. Vi använder sfäriska koordinater (r,θ,φ). Eftersom K är sfäriskt symmetrisk och Dirichletproblemet ifråga har exakt en lösning så måste också denna vara sfäriskt symmetrisk, dvs $U = U(r)$. Uttryckt i sfäriska koordinater blir därmed ekvationen

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial r})) = 0$$

för $1 < r < 2$. Detta ger

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r}) = 0,$$

$$r^2\frac{\partial U}{\partial r} = A \quad (\text{konstant}),$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{A}{r^2},$$

$$U = -\frac{A}{r} + B$$

(B konstant). Sätter vi in randvillkoren får vi att A och B ska uppfylla

$$-A + B = 1,$$

$$-\frac{A}{2} + B = 0.$$

Detta ger $A = -2$, $B = -1$ och därmed svaret på uppgiften:

$$U = \frac{2}{r} - 1.$$

13. Låt $\mathbf{e}$ vara en konstant vektor, t.ex. vilken som helst av basvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$, $\hat{\mathbf{e}}_z$. Med nablakalkyl och Stokes' vanliga sats fås

$$-\mathbf{e}\cdot\oint_{\partial S}\mathbf{F}\times d\mathbf{r} = -\oint_{\partial S}\mathbf{e}\cdot(\mathbf{F}\times d\mathbf{r}) = \oint_{\partial S}(\mathbf{F}\times\mathbf{e})\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \iint_S(\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{e})\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma = \iint_S(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{e})\,d\sigma$$

$$= \iint_S\mathbf{e}\cdot((\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\times\mathbf{F})\,d\sigma = \mathbf{e}\cdot\iint_S((\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\times\mathbf{F})\,d\sigma.$$

Härav följer

$$\oint_{\partial S}\mathbf{F}\times d\mathbf{r} = -\iint_S((\hat{\mathbf{n}}\times\nabla)\times\mathbf{F})\,d\sigma,$$

vilket skulle bevisas.