Institutionen för matematik, KTH
Avd Matematik

**Tentamensskrivning, 2003-05-27, kl. 08.00-13.00**
**5B1117, Matematik III för E, ME och Open**

• Om du redan är godkänd (dvs har minst 5 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.

• Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 15. Se del A nedan.

**Preliminära gränser** för betygen 3, 4, och 5 är 15, 26 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Notera att de preliminära betygsgränserna har ändrats (sänkts) jämfört med vad som tidigare meddelats. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning.

**Hjälpmedel:** Medföljande formelblad.

Lösningsförslag finns efter skrivtidens slut på kurshemsidan.

Var god vänd!

**Del A, 3-poängsuppgifter.**

Den som blivit godkänd på lappskrivning $x$, $1 \leq x \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

**1.** För vilka värden på $x$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n} \qquad ?$$

**2.** Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av ytan $z = xy$ och planen $y = x$, $x = 1$ och $z = 0$.

**3.** Låt $E$ vara ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

där $a > 0$ och $b > 0$ är konstanter. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\partial E} x dy$$

på två olika sätt:

**a)** Genom direkt integration (parametrisering e. likn.). ($2p$)
**b)** Genom att använda Greens formel. ($1p$)

**4.** En yta $S$ är parametriserad enligt

$$x = u^2 - v^2,$$

$$y = 2uv,$$

$$z = u,$$

där $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 4$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

då $\mathbf{F} = (y, -z, 1)$ och normalens $z$-komponent är negativ ($n_z < 0$).

**5.** Då en stel kropp $K$ roterar med vinkelhastigheten $\omega$ (en konstant vektor) så ges hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ i en godtycklig punkt $\mathbf{r} \in K$ av

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}.$$

Beräkna $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

**6.** Ett vektorfält $\mathbf{A}$ ges i sfäriska koordinater $(r, \theta, \varphi)$ av

$$\mathbf{A} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\,\sin\theta}\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Bestäm en skalär potential $U$ till vektorfältet $\mathbf{A}$.

**7.** En boll $B$ med radie 3 och medelpunkt $(0, 0, -4)$ är (helt) nedsänkt i en vätska för vilken trycket ges av

$$p(x, y, z) = -z$$

då $z < 0$. Beräkna den lyftkraft

$$-\iint_{\partial B} p\,\hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

som vätskan utövar på $B$. ($\hat{\mathbf{n}}$ är den utåtriktade normalvektorn.)

**8.** För var och en av de nio olika sammansättningarna av grad, div och rot verkande på skalär- eller vektorfält i $\mathbf{R}^3$, ange vilket av följande alternativ som gäller.

1) Sammansättningen saknar mening.
2) Sammansättningen är meningsfull men blir alltid lika med noll.
3) Sammansättningen är meningsfull och blir inte alltid noll.

De nio sammansättningarna är

grad grad
div grad
rot grad
grad div
div div
rot div
grad rot
div rot
rot rot

*Bedömning:* 5 rätta svar ger 1$p$, 7 rätta svar ger 2$p$, och 9 rätta svar ger 3$p$.

**Del B, 4-poängsuppgifter.**

**9. a)** Visa att cirkulationen av vektorfältet (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

runt varje sluten kurva som ej omsluter $z$-axeln är noll. ($2p$)

**b)** Visa att påståendet i (a) gäller även om kurvan omsluter $z$-axeln. ($2p$)

**10.** Låt $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$. Avgör om den generaliserade integralen

$$\iint_D xe^{-x^2}\, dxdy$$

är konvergent eller divergent.

**11.** Beräkna

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, dxdydz$$

om $\mathbf{A}$ har en skalär potential $\Phi$, som antar ett konstant värde $\Phi_0$ på randytan $\partial V$, och $\mathbf{B}$ är ett källfritt vektorfält. *Ledning:* Integrera formeln $\operatorname{div} \Phi\mathbf{B} = ...$ över $V$.

**12.** Låt $K$ vara området $1 \leq r \leq 2$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bestäm den lösning $U$ till Laplaces ekvation

$$\Delta U = 0 \quad \text{i} \quad K$$

som uppfyller att $U = 1$ på randytan $r = 1$, $U = 0$ på randytan $r = 2$.

**13.** Låt $S$ vara en orienterad yta med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ och låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt deriverbart vektorfält på $S$. Härled integralsatsen

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \times d\mathbf{r} = -\iint_S ((\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{F})\, d\sigma.$$

Du får använda Stokes' sats i dess vanliga form.