

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2003-08-27 kl. 14.00 - 19.00,
5B1117 Matematik III för E1, Open1 och ME1

1. Vi byter koordinater till

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y. \end{cases}$$

I (u, v) -planet blir D en kvadrat med hörn i punkterna $\pm(1, 1)$, $\pm(1, -1)$, alltså kvadraten

$$D' : |u| \leq 1, |v| \leq 1.$$

Vi har

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = \frac{1}{2}$$

varför

$$\iint_D (x + y)^2 dx dy = \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 du \int_{-1}^1 dv = \frac{2}{3}.$$

2. Betrakta y som funktion av x och z , nämligen

$$y = \frac{1}{4}(z^2 - x^2)$$

för $x^2 + z^2 \leq 12$. Med hjälp av en välkänd formel och övergång till polära koordinater får vi då:

$$\begin{aligned} \text{Arean} &= \iint_{x^2+z^2 \leq 12} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dx dz \\ &= \iint \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}z^2 + 1} dx dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + 1} r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}r^2 + 1 \right)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{12}} = \frac{56\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. Vektorfältet har en singularitet i virvelpunkten $(2, 0)$. Utanför denna ger derivering att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

För $r < 2$ ger Greens sats därför att

$$\oint_{C_r} P dx + Q dy = \iint_{D_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

där D_r är området innanför C_r (som alltså inte innehåller $(2, 0)$).

För $r > 2$ så omsluter C_r virvelpunkten men vi kan ändå använda Greens sats till att deformera C_r (utan att korsa $(2, 0)$) till en kurva som är lättare att integrera över. Vi väljer då en cirkel med centrum i $(2, 0)$, t.ex. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. Parametriserar vi denna enligt

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

får vi

$$\oint_{C_r} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

då $r > 2$.

4. Om vi parametriserar ytan med den polära vinkeln φ och z enligt

$$S : \begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

så blir $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $d\sigma = d\varphi dz$ (ty $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}| = 1$) och vi får

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + z, \sin \varphi, 2z^2) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) d\varphi \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} (1 + z \cos \varphi) d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Man kan också använda Gauss' sats, varvid man får en volymsintegral (ty $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$) och två ytintegraler (för cylinderns topp och botten).

5. Direkt uträkning ger att $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ i hela rummet. Alltså finns en skalär potential U och denna fås ur

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2z + 1 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x^2y \end{cases}$$

Första ekvationen ger

$$U = x^2yz + f(y, z)$$

varav

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2z + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Jämförelse med andra ekvationen ovan ger att $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ dvs att

$$f(y, z) = y + g(z).$$

Sätter vi in det uttryck för U vi nu har i ekvationen för $\frac{\partial U}{\partial z}$ finner vi att $g'(z) = 0$ dvs att $g(z)$ är konstant.

Sammanfattningsvis har vi funnit alla potentialer:

$$U = x^2yz + y + C$$

där C är en godtycklig konstant.

6. Låt $\mathbf{r} = (x, y, z) = (w, uv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$. Då är

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, v, u) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, u, -v) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (1, 0, 0) \end{cases}$$

Vi konstaterar att koordinatsystemet verkligen är ortogonalt och vi får skalfaktorerna

$$\begin{cases} h_u = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_v = \sqrt{u^2 + v^2} \\ h_w = 1 \end{cases}$$

Detta ger (enligt formelbladet)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{B}_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{B}_v) + \frac{\partial}{\partial w} (u^2 + v^2) \mathbf{B}_w \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} u + \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial}{\partial w} ((u^2 + v^2)w) \right] = 1 + \frac{2}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

7. Vi använd cylinderkoordinater

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Då övergår K i K' given av $\rho^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, eller

$$K' : \quad 0 \leq \rho \leq z \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vi får

$$\begin{aligned} |K| &= \iiint_{K'} \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^z \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \iiint_K \mathbf{r} \, dx dy dz &= \iiint_{K'} (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho d\varphi dz \\ &= (0, 0, 2\pi \int_0^1 z \, dz \int_0^z \rho \, d\rho) = (0, 0, \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Därmed blir tyngdpunkten

$$\mathbf{r}_{TP} = (0, 0, \frac{3}{4}).$$

8. Räkna vi bara på i sfäriska koordinater, använder uttrycket för $d\mathbf{r}$ i formelbladet och använder φ som parameter längs L , så att

$$L : \begin{cases} r = R \\ \theta = 5\pi/6 \quad (\text{speciellt } d\theta = 0) \\ 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

så får vi

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi R \, d\theta + (2 - \cos \varphi) R \sin \theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos \varphi) R \sin \frac{5\pi}{6} \, d\varphi = 2\pi R. \end{aligned}$$

9. Summation av den geometriska serien ger

$$a_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

Härav

$$(|a_n|)^{1/n} = (2^{n+1} - 1)^{1/n} = 2 \cdot (2 - 2^{-n})^{1/n}$$

som konvergerar mot 2 då $n \rightarrow \infty$. Enligt rotkriteriet är därmed konvergensraden $R = 1/2$.

I punkterna $x = \pm \frac{1}{2}$ gäller att

$$|a_n x^n| = (2^{n+1} - 1) \frac{1}{2^n} = 2 - 2^{-n}$$

inte går mot noll då $n \rightarrow \infty$, så för dessa x kan serien inte konvergera. Konvergensmängden blir därmed det öppna intervallet

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

10. Man kan antingen parametrisera L och räkna ut direkt eller också använda Stokes' universalsats

$$\oint_L I \, d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = I \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, d\sigma,$$

där S är en yta som har L som rand (observera att I är konstant).

Vi använder den senare metoden, med

$$S: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0,$$

varvid $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$. Detta ger, om vi observerar att $\text{div } \mathbf{B} = 0$,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla) \times \mathbf{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z = \text{grad } B_z = (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Vi får alltså

$$\mathbf{F} = I \iint_S (1, 2, 3) \, d\sigma = \pi R^2 I (1, 2, 3).$$

11. Den del K_R av K som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 \leq R^2$ har volymen

$$\begin{aligned} \iiint_{K_R} dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (\cosh(x^2 + y^2) - \sinh(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \iint e^{x^2+y^2} dx dy = \iint e^{r^2} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \leq \pi. \end{aligned}$$

Det följer att volymen är ändlig och lika med π :

$$|K| = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

12. Parametrisera enligt

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (\cos u, \sin u, 0), & 0 \leq u < 2\pi \\ \mathbf{r}_2 = (0, 0, t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

Vi har då $d\mathbf{r}_1 = (-\sin u, \cos u, 0) du$, $d\mathbf{r}_2 = (0, 0, 1) dt$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\cos u, \sin u, -t)$ och

$$\begin{aligned} \text{link}(L_1, L_2) &= \frac{1}{4\pi} \int_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \int_{L_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin u, \cos u, 0) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos u, \sin u, -t) \times (0, 0, 1)}{|(\cos u, \sin u, -t)|^3} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin u, \cos u, 0) du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin u, -\cos u, 0)}{(1+t^2)^{3/2}} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin^2 u - \cos^2 u) du \left[\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

13. a) \mathbf{A} är väldefinierad utom (möjligen) då $\sin \theta = 0$, dvs då $\theta = 0$ eller π . Då $\theta = 0$ är emellertid också täljaren lika med noll och om vi förlänger med $1 + \cos \theta$ så ser vi att \mathbf{A} kan skrivas

$$\mathbf{A} = \frac{\sin \theta}{r(1 + \cos \theta)} \hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

som är singulär bara då $\theta = \pi$, dvs bara på negativa z -axeln. (Taylorutveckling eller l'Hopital kan också användas.)

b) Direkt uträkning i sfäriska koordinater ger att

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

c) Eftersom D i detta fall inte innehåller några singulära punkter så ger Stokes' sats

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \\ &= \iint_D \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \iint_D d\sigma = |D| \end{aligned}$$

(eftersom $r = 1$ och $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$ på D).

d) Om $(0, 0, -1)$ tillhör D så är komplementet D^c till D på sfären fritt från singulariteter. D^c har samma rand som D , men orienteringen blir den omvända. Därmed fås

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\partial D^c} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \iint_{D^c} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = -|D^c| = |D| - 4\pi. \end{aligned}$$