Institutionen för matematik, KTH
Avd Matematik

Tentamensskrivning, 2003-08-27, kl. 14.00-19.00
5B1117, Matematik III för E, ME och T (6p)

- Om du redan är godkänd (dvs har minst 5 godkända lappskrivningar) så skall du endast räkna uppgifter från B-delen.
- Om du inte är godkänd får du räkna uppgifter från både A-delen och B-delen. För uppgifter från A-delen tillgodoräknas dock endast det antal poäng som kompletterar dina bonuspoäng till 15. Se del A nedan.

Preliminära gränser för betygen 3, 4, och 5 är 15, 26 och 31 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning.

Hjälpmedel: Medföljande formelblad.

Lösningsförslag finns efter skrivtidens slut på kurshemsidan.

Del A, 3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på lappskrivning x, $1 \leq x \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna
$$\iint_D (x+y)^2\,dxdy$$
där D är kvadraten med hörn i de fyra punkterna $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

2. Beräkna arean av ytan given av
$$x^2 + 4y = z^2, \qquad x^2 + z^2 \leq 12.$$

3. Det plana vektorfältet
$$(P, Q) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2}\right)$$
kan exempelvis beskriva hastighetsfältet hos ett vätskeflöde med en virvel i punkten $(2, 0)$. Låt C_r vara cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ orienterad moturs. Beräkna cirkulationsintegralen
$$\oint_{C_r} P dx + Q dy$$
för alla värden på $r > 0$ utom $r = 2$.

4. Bestäm flödet
$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$$
av vektorfältet
$$\mathbf{E}=(x+z,\,y,\,2z^2)$$
ut ur ytan
$$S:\quad x^2+y^2=1,\quad 0\le z\le 1.$$

5. Undersök om vektorfältet
$$\mathbf{A}=(2xyz,\,x^2z+1,\,x^2y)$$
har en skalär potential och bestäm i så fall en sådan.

6. Ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w) definieras genom
$$x=w,$$
$$y=uv,$$
$$z=\frac{1}{2}(u^2-v^2).$$
Låt $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$, $\hat{\mathbf{e}}_w$ vara tillhörande ON-bas. Beräkna divergensen av vektorfältet
$$\mathbf{B}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\hat{\mathbf{e}}_u+v\hat{\mathbf{e}}_v)+w\hat{\mathbf{e}}_w.$$

7. Beräkna tyngdpunkten
$$\mathbf{r}_{TP}=\frac{\iiint_K \mathbf{r}\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}$$
för den kon K som ges av att $x^2+y^2\le z^2$, $0\le z\le 1$ ($\mathbf{r}=(x,y,z)$).

8. Låt S vara jordytan, en sfär med radie R. Vi använder sfäriska koordinater (r,θ,φ) (där $r=R$ på S). Vid ett tillfälle ges vindhastigheten av vektorfältet
$$\mathbf{v}=\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta+(2-\cos\varphi)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$
En seglare färdas runt Antarktis i ostlig riktning på latitud 60 grader syd, dvs $\theta=5\pi/6$. Beräkna hur mycket medvind seglaren har, dvs beräkna integralen
$$\oint_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r},$$
där L är banan enligt ovan ($\theta=5\pi/6$).

Del B, 4-poängsuppgifter

9. Bestäm konvergensmängden för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n.$$

10. Då en elektrisk ledare L befinner sig i ett magnetfält $\mathbf{B}$ så utsätts den för kraften

$$\mathbf{F} = \oint_L I d\mathbf{r} \times \mathbf{B},$$

där I är strömstyrkan i L. Beräkna $\mathbf{F}$ då

$$L: x^2 + y^2 = 1, \qquad z = 0,$$

$$\mathbf{B} = (-x,\ -2y,\ x + 2y + 3z).$$

Strömmen räknas positiv i enhetscirkelns (i (x, y)-planet) positiva omloppsriktning.

11. De hyperboliska trigonometriska functionerna cosh och sinh definieras av

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Undersök om den obegränsade kropp K som definieras av

$$K: \quad \sinh(x^2 + y^2) \leq z \leq \cosh(x^2 + y^2)$$

har ändlig volym och bestäm i så fall volymen.

12. Låt L_1 och L_2 vara två (riktade) kurvor i $\mathbf{R}^3$. Om kurvorna inte skär varandra så finns ett *länkningstal* definierat av

$$\operatorname{link}(L_1, L_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \int_{L_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

(Pricken mellan integralerna anger skalärprodukt.) För slutna kurvor blir detta ett heltal som mäter hur många gånger de vindlar sig omkring varandra.

Beräkna $\operatorname{link}(L_1, L_2)$ då L_1 är enhetscirkeln i (x, y)-planet med dess vanliga orientering och L_2 är z-axeln riktad uppåt. (L_2 är inte sluten, men detta spelar ingen roll i denna uppgift.)

Ledning: Parametrisera helt enkelt kurvorna och räkna ut integralerna. Det kan vara bra att veta att

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}\right) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

13. Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

(sfäriska koordinater).

a) Visa att $\mathbf{A}$ är definierad i hela $\mathbf{R}^3$ minus negativa z-axeln.

b) Bestäm rot $\mathbf{A}$.

c) Låt D vara ett delområde av enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$ sådant att "sydpolen" $(0,0,-1)$ inte tillhör D (eller dess rand). Visa att

$$\int_{\partial D} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = |D|$$

(arean av D).

d) Vad blir integralen i c) om $(0,0,-1)$ ligger i D (men fortfarande inte på ∂D)?